

Technische Universität Dresden

Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

Über Minoren gerichteter Graphen

Diplomarbeit
zur Erlangung des ersten akademischen Grades

Diplommathematiker

vorgelegt von

Name: Seidler

Vorname: Steffen

geboren am: 11.05.1983

in: Dresden

Tag der Einreichung: 22.12.2010

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. habil. Ulrike Baumann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Grundbegriffe der Graphentheorie	3
1.2	Reduzibilität	12
2	Über Minoren von Graphen	16
2.1	Minoren von Graphen	16
2.2	Topologische Minoren von Graphen	19
2.3	Baumzerlegung und Baumweite $tw(G)$	21
2.4	Wegzerlegung und Wegbreite $pw(G)$	23
2.5	Räuber-und-Gendarmen-Spiele auf Graphen	24
2.6	Resultate und Anwendungen	27
3	Über Minoren von Digraphen	29
3.1	Übertragung der Minorenrelation auf Digraphen	29
3.2	Hindernisse bei der Definition einer gerichteten Baumweite	31
3.3	Arboreale Weite $dtw(D)$	34
3.3.1	Arboreale Weite und Räuber-und-Gendarmen-Spiele	37
3.3.2	Resultate und Anwendungen	40
3.4	Gerichtete Baumweite $dtw_R(D)$	41
3.5	D-Weite $dw(D)$	44
3.6	DAG-Weite $dgw(D)$	46
3.6.1	DAG-Weite und Räuber-und-Gendarmen-Spiele	51
3.6.2	Resultate und Anwendungen	53
3.7	Räuber-und-Gendarmen-Spiele auf Digraphen	54
3.8	Eingeschränkte Minorenrelation für Digraphen	56
3.8.1	Die Teilgraphenrelation für Digraphen \subseteq	56
3.8.2	Die topologische Minorenrelation für Digraphen \leq_t	58
3.8.3	Die Minorenrelation auf Digraphen nach JRST \leq_{JRST}	63
3.8.4	Eingeschränkte Minorenrelationen \leq_1, \leq_2, \leq_3	65
4	Verbindungen zwischen Reduzibilität und Minoren von Digraphen	71
4.1	Reduzibilität und initiale Wurzeldigraphen	71
4.2	Charakterisierung der Reduzibilität durch eingeschränkte Minoren	73
4.3	Resultate der Minorentheorie für reduzible initiale Wurzeldigraphen	75
5	Zusammenfassung und Ausblick	82
	Literaturverzeichnis	84
	Abbildungsverzeichnis	86

1 Einleitung

Alle Graphen und Digraphen in dieser Arbeit seien endlich und können Schlingen und Mehrfachkanten besitzen, sofern nicht etwas anderes vorausgesetzt wird.

Die Minoren von Graphen wurden bereits vielfach untersucht. In der Publikationsreihe „Graph Minors“ [19], welche von Neil Robertson und Paul D. Seymour seit 1983 im Journal of Combinatorial Theory veröffentlicht wird und mittlerweile 23 Artikel umfasst, wurden die Minoren von Graphen und viele wichtige Resultate auf diesem Gebiet vorgestellt. Die Minoren von Graphen bilden allerdings nicht nur ein wichtiges Teilgebiet der Graphentheorie, sondern haben auch wichtige Anwendungen in der algorithmischen Lösung verschiedener komplexer Probleme, welche sich in Form von Graphen beschreiben lassen. So sind viele NP-schwere Probleme auch mit polynomiell oder gar linearem Zeitaufwand lösbar, wenn die zu Grunde liegende Klasse von Graphen nur eine beschränkte Baumweite besitzt.

Gerade in der Softwaretechnologie werden viele Sachverhalte durch Graphen und Digraphen dargestellt. Beispiele für dieses Vorgehen sind unter Anderem:

- Kontrollflussgraphen von Programmen,
- Abhängigkeitsgraphen von Programmen,
- Klassen- und Pakethierarchien in der objektorientierten Programmierung,
- Modelle und Metamodelle im modellbasierten Softwareentwurf.

Auftretende Probleme und Fragestellungen werden schließlich auf diese Darstellung übertragen und können auf dieser Grundlage untersucht werden. Dazu zählen unter Anderem:

- Erreichbarkeitsanalysen,
- Abhängigkeitsanalysen,
- Validierung.

Die so übertragenen Sachverhalte bilden dabei eine entsprechende Klasse von Graphen bzw. Digraphen. Insbesondere zeichnet sich eine solche Klasse durch gewisse Eigenschaften aus, welche unter Umständen den Aufwand für die Beantwortung des zu lösenden Problems reduzieren können. Eine solche Eigenschaft ist beispielsweise die Reduzibilität, die im Verlauf dieser Arbeit vorgestellt und untersucht wird.

Durch die Rückführung von Problemen auf Graphen mit beschränkter Baumweite ist es dabei möglich die Techniken der Minorentheorie für Graphen zur Lösung heranzuziehen. So wurden zum Beispiel in [30] die Kontrollflussgraphen strukturierter (GOTO-freie) Programme untersucht. Diese lassen sich durch Entfernung der Kantenorientierung in Form von Graphen repräsentieren. Dabei konnte nachgewiesen werden, dass diese Graphen für strukturierte Programme eine kleine beschränkte Baumweite besitzen. Damit konnte nachgewiesen werden, dass die Registerzuweisung für solche Programme effizient durchgeführt werden kann.

Die Untersuchung wurden allerdings unter Vernachlässigung der Kantenorientierung des Kontrollflussgraphen durchgeführt. Dies liegt vor Allem daran, dass es bisher nicht gelungen ist, ähnlich mächtige Hilfsmittel in Form einer einheitlichen Minorentheorie für Digraphen zu entwickeln. Die

Kantenorientierung der Kontrollflussgraphen könnte jedoch weitere wertvolle Informationen enthalten und motiviert die Untersuchung der bisherigen Ansätze einer Minorentheorie für Digraphen als Grundlage weiterführender Forschung.

In den nachfolgenden Kapiteln wird die Minorentheorie von Graphen mit einigen ausgewählten Resultaten vorgestellt. Des Weiteren wird ein Überblick über einige der zahlreichen Ansätze einer Minorentheorie für Digraphen zusammengetragen. Dabei werden die gerichteten Versionen der Baumweite vereinheitlicht, im Detail vorgestellt und in Beziehung gesetzt. Dabei werden die bereits bekannten Ansätze, welche zum Teil nur für schlichte Digraphen formuliert und untersucht wurden, auf allgemeinere Digraphen mit Mehrfachkanten und Schlingen verallgemeinert. In dieser Arbeit werden allerdings nur die arboreale Weite, gerichtete Baumweite, D-Weite, DAG-Weite und zwei gerichtete Versionen des Räuber-und-Gendarmen-Spiels mit den entsprechenden Gendarmenzahlen untersucht, da es sonst den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Außerdem werden die Probleme bei der Entwicklung einer gerichteten Version des Minorenbegriffs dargestellt. Darauf aufbauend wird systematisch ein neuer Minorenbegriff vorgestellt, welcher mit den genannten gerichteten Versionen der Baumweite verträglich ist.

In [30] war das Problem des Informationsverlustes bei Vernachlässigung der Kantenorientierung nicht unbekannt. Im Zusammenhang mit strukturierten Programmen existiert außerdem das Konzept der Reduzibilität von Kontrollflussgraphen. Dabei lässt sich ein reduzierbarer Kontrollflussgraph schrittweise auf einen Knoten reduzieren. Dabei entstehen hierarchisch strukturierte Intervalle, auf deren Grundlage sich Probleme, wie die Ermittlung der Lebensdauer einer Variablen, vereinfachen lassen. Die bisherigen Arbeiten im Zusammenhang mit der Reduzibilität befassten sich seit der ersten Veröffentlichung in [3] vorwiegend mit den Anwendungsgebieten für dieses Konzept.

In dieser Arbeit wird das Konzept der Reduzibilität in Verbindung mit Minoren von Digraphen gebracht und mit den gerichteten Versionen der Baumzerlegungen und Baumweite untersucht. Des Weiteren werden sogar sehr kleine obere Schranken der arborealen Weite, D-Weite (≤ 1) und der Gendarmenzahl in einem der gerichteten Räuber-und-Gendarmen-Spiele (≤ 2) herausgearbeitet und konkrete Möglichkeiten zur Konstruktion entsprechender Zerlegungen vorgestellt. Diese Zerlegungen lassen sich schließlich in algorithmischen Anwendungen für das Konzept der Reduzibilität nutzen.

1.1 Grundbegriffe der Graphentheorie

In diesem Abschnitt sollen einige wesentliche Begriffe geklärt werden, die als Grundlagen der Graphentheorie angesehen werden können und somit in dieser Arbeit immer wieder eine Rolle spielen. Bereits für den Begriff des Graphen und Digraphen haben sich bisher die verschiedensten Formulierungen für Definitionen ergeben.

Als Konvention für diese Arbeit seien alle Graphen und Digraphen endlich. Das heißt, die Knoten- und Kantenmengen werden als endlich vorausgesetzt. Des Weiteren können alle Graphen und Digraphen sowohl Schlingen als auch Mehrfachkanten enthalten.

Da in dieser Arbeit die Struktur von Graphen und Digraphen im Vordergrund steht, wird häufig darauf verzichtet, den Spezialfall des leeren (Di-)Graphen einzubeziehen. Daher sind hier alle Graphen und Digraphen als nichtleer vorausgesetzt, auch wenn diese Abgrenzung des Spezialfalls nicht immer benötigt wird.

Definition: (*Graph*)

Ein *Graph* G besteht aus einer Knotenmenge $V = V(G)$ und einer Kantenmenge $E = E(G)$. Des Weiteren besitzt G mit $\mu : E \rightarrow \binom{V}{1,2} : e \mapsto \{u, v\}$ eine Abbildung, welche jeder Kante die Menge ihrer Endpunkte zuordnet.

Damit lässt sich G kurz als Tripel (V, E, μ) schreiben.

Bei dieser Definition sind Mehrfachkanten zugelassen und eine Kante e ist genau dann eine Schlinge an einem Knoten v , wenn $\mu(e) = \{v\}$ und somit $|\mu(e)| = 1$ gilt.

In der Literatur wird diese Definition häufig für die Spezialfälle der einfachen bzw. schlichten Graphen vereinfacht. Dabei werden die Kanten des Graphen direkt durch ihre Bilder unter μ identifiziert.

Definition: (*einfacher Graph, schlichter Graph*)

Ein *einfacher Graph* G ist ein Graph ohne Mehrfachkanten, welcher aber noch Schlingen besitzen kann. Somit besteht G aus der Knotenmenge $V = V(G)$ und der Kantenmenge $E = E(G) \subseteq \binom{V}{1,2}$.

Ein *schlichter Graph* G ist ein einfacher Graph ohne Schlingen. Somit besteht G aus der Knotenmenge $V = V(G)$ und der Kantenmenge $E = E(G) \subseteq \binom{V}{2}$.

Damit lässt sich G in beiden Fällen kurz als geordnetes Paar (V, E) schreiben.

In Form von $G = (V, E, \mu)$ ergeben sich folgende Anforderungen an μ .

- Ist G einfach, dann treten keine Mehrfachkanten auf. Das heißt, μ ist eine injektive Abbildung.
- Ist G schlicht, dann treten zudem keine Schlingen auf. Das heißt, μ kann als injektive Abbildung $\mu : E \rightarrow \binom{V}{2} : e \mapsto \{u, v\}$ aufgefasst werden.

Eine wichtige Unterklasse der schlichten Graphen bildet die Menge der vollständigen Graphen.

Definition: (*vollständiger Graph K^n*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist der *vollständige Graph* mit n Knoten definiert als schlichter Graph $K^n := (V, E)$ definiert mit $V := \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E := \binom{V}{2}$.

Das heißt, zwischen je zwei Knoten $u, v \in V$ existiert genau eine Kante $e = \{u, v\} \in E$.

Der Fokus dieser Arbeit liegt allerdings vorwiegend auf der Menge der gerichteten Graphen (kurz Digraphen). Dabei handelt es sich um Graphen, deren Kanten zusätzlich eine Orientierung besitzen.

Definition: (*gerichteter Graph, Digraph*)

Ein *gerichteter Graph* („directed graph“, *Digraph*) D besteht aus einer Knotenmenge $V = V(D)$ und einer Kantenmenge $E = E(D)$. Des Weiteren besitzt D mit $\mu : E \rightarrow V \times V : e \mapsto (u, v)$ eine Abbildung, welche jeder Kante ein geordnetes Paar zuordnet. Dabei sei die erste Komponente der Anfangsknoten die zweite Komponente der Endknoten der entsprechenden Kante.

Damit lässt sich D kurz als Tripel (V, E, μ) schreiben.

Bei dieser Definition sind Mehrfachkanten zugelassen und eine Kante e ist genau dann eine Schlinge an einem Knoten v , wenn $\mu(e) = (v, v)$ gilt.

Analog zu den Graphen lassen sich Vereinfachungen wie einfache Digraphen und schlichte Digraphen formulieren.

Definition: (*einfacher Digraph, schlichter Digraph*)

Ein *einfacher Digraph* D ist ein Digraph ohne Mehrfachkanten, welcher aber noch Schlingen besitzen kann. Somit besteht D aus der Knotenmenge $V = V(D)$ und der Kantenmenge $E = E(D) \subseteq V \times V$.

Ein *schlichter Digraph* D ist ein einfacher Digraph ohne Schlingen. Somit besteht D aus der Knotenmenge $V = V(D)$ und der Kantenmenge $E = E(D) \subseteq (V \times V) \setminus \Delta_V$ mit $\Delta_V := \{ (v, v) \mid v \in V \}$.

Damit lässt sich D in beiden Fällen kurz als geordnetes Paar (V, E) schreiben.

In Form von $D = (V, E, \mu)$ ergeben sich folgende Anforderungen an μ .

- Ist D einfach, dann treten keine Mehrfachkanten auf. Das heißt, μ ist eine injektive Abbildung.
- Ist D schlicht, dann treten zudem keine Schlingen auf. Das heißt, μ kann als injektive Abbildung $\mu : E \rightarrow (V \times V) \setminus \Delta_V : e \mapsto (u, v)$ aufgefasst werden.

Weiterhin sind die Nachbarschaftsbeziehungen unter den Knoten von entscheidendem Interesse, so dass folgende Größen definiert sind.

Definition: (*IN(v), in(v), OUT(v), out(v), indeg(v), outdeg(v), initialer Knoten*)

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph und $v \in V$.

- $IN(v)$ bezeichne die Menge aller Nachbarknoten, von denen mindestens eine Kante zu v führt.

$$IN(v) := \{ u \in V \mid \exists e \in E : \mu(e) = (u, v) \text{ und } u \neq v \}$$

- $in(v)$ bezeichne die Anzahl verschiedener Nachbarknoten, von denen mindestens eine Kante zu v führt. So gilt $in(v) := |IN(v)|$.
- $OUT(v)$ bezeichne die Menge aller Nachbarknoten, zu denen mindestens eine Kante von v führt.

$$OUT(v) := \{ u \in V \mid \exists e \in E : \mu(e) = (v, u) \text{ und } u \neq v \}$$

- $out(v)$ bezeichne die Anzahl verschiedener Nachbarknoten, zu denen mindestens eine Kante von v führt. So gilt $out(v) := |OUT(v)|$.
- $indeg(v)$ bezeichne die Anzahl der Kanten, die zu v führt.

$$indeg(v) := |\{ e \in E \mid \mu(e) = (\cdot, v) \}|$$

- $outdeg(v)$ bezeichne die Anzahl der Kanten, die von v ausgehen.

$$outdeg(v) := |\{ e \in E \mid \mu(e) = (v, \cdot) \}|$$

- v heißt *initialer Knoten* von D , falls von keinem anderen Knoten eine Kante zu v führt. Das heißt, es gilt $in(v) = 0$.

Falls v keine Schlingen besitzt, so ist dies äquivalent zu $indeg(v) = 0$.

Bei Untersuchungen von Digraphen, bei denen die Orientierung der Kanten unbeachtet bleibt, kann der Digraph durch das Entfernen der Kantenorientierung zu einem Graphen vereinfacht werden. Dabei wird dann der so genannte zugrundeliegende Graph an Stelle des ursprünglichen Digraphen für die Untersuchung herangezogen.

Definition: (*zugrundeliegender Graph, $U(D)$*)

Sei D ein Digraph. Der *zugrundeliegende Graph* ist dann definiert als der Graph $G := U(D)$, welcher entsteht, wenn die Orientierung der Kanten aus D entfernt wird. Damit ist G durch D eindeutig bestimmt.

Dazu äquivalent ist die Formulierung, dass G genau dann der zugrundeliegende Graph von D ist, wenn D eine Orientierung von G ist.

Das heißt, U ist eine surjektive Abbildung von der Menge der Digraphen auf die Menge der Graphen. Dabei bleiben Knoten- und Kantenmenge identisch mit $U(V) := V$, $U(E) := E$ und die Abbildung μ wird dabei zu

$$U(\mu) = U \circ \mu : E \xrightarrow{\mu} V \times V \xrightarrow{U} \binom{V}{1,2} : e \mapsto (u, v) \mapsto \{u, v\}.$$

Bemerkung:

Es sei anzumerken, dass das Hilfsmittel des zugrundeliegenden Graphen den Sachverhalt vereinfachen kann. Allerdings wird sich aber der Informationsgehalt durch das Entfallen der Information über die Kantenorientierung im Allgemeinen verringert. Aufgrund des auftretenden Informationsverlustes sollte dieses Hilfsmittel daher nur bedingt genutzt werden.

Umgekehrt lässt sich ein Graph auch als Digraph schreiben, indem den Kanten eine Orientierung hinzugefügt wird. Eine weitere Variante, welche in dieser Arbeit eine besondere Rolle spielt, ist die wechselseitige Orientierung der Kanten des Graphen zu einem Digraphen.

Definition: (*wechselseitig orientierter Digraph, $D(G)$*)

Sei G ein Graph. Der *wechselseitig orientierte Digraph* ist dann definiert als der Digraph $D := D(G)$, welcher entsteht, wenn jede ungerichtete Kante durch ein Paar wechselseitig orientierter Kanten ersetzt wird.

Das heißt, für einen Graphen $G = (V, E, \mu)$ ist der wechselseitig orientierte Digraph definiert durch $D = (V, E', \mu')$ mit

$$E' := \bigcup_{e \in E} E_e$$

$$E_e := \{e_1, e_2 \mid \mu'(e_1) = (u, v) \text{ und } \mu'(e_2) = (v, u)\} \quad \text{für } e \in E \text{ (mit } \mu(e) = \{u, v\} \text{)}.$$

Ein Spezialfall dieser Formulierung bilden die vollständigen Digraphen, die sich aus den vollständigen Graphen herleiten lassen.

Definition: (*vollständiger Digraph, K_d^n*)

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist der *vollständige Digraph* mit n Knoten definiert als $K_d^n := D(K^n)$.

Bemerkung:

Bei der Darstellung von Digraphen ist es üblich, wechselseitig orientierte Kantenpaare als ungerichtete Kante zu zeichnen, da dies die Übersichtlichkeit der Darstellung erhöht. Diese Konvention wird auch für die Darstellungen von Digraphen in dieser Arbeit genutzt.

Die Verbindung zwischen den Knoten bzw. Knotenmengen eines Graphen durch Knotenfolgen wird in üblicher Weise als Pfad und geschlossene Pfade als Zyklen bezeichnet. An dieser wird lediglich die gerichtete Version der beiden Begriffe in der hier verwendeten Notation definiert und für die ungerichteten Definitionen auf [8] verwiesen.

Definition: (*Dipfad, Länge eines Dipfades, disjunkt, innere Knoten*)

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph und $u, v \in V$. Ein *Dipfad* („directed walk“) von u nach v in D ist eine Knotenfolge $\pi = (x_i)_{i=0, \dots, k}$ von $k \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschiedener Knoten in V mit folgenden Eigenschaften

- $x_0 := u$ und $x_k := v$ sowie
- für $k > 0$ existiert für jedes $i = 0, \dots, k-1$ ein $e \in E$ mit $\mu(e) = (x_i, x_{i+1})$.

Der Dipfad besitzt dann die *Länge* k und die Knoten x_1, \dots, x_{k-1} werden als *innere Knoten* bezeichnet.

Zwei Dipfade $\pi_1 = (x_i)_{i=0, \dots, k_1}$ und $\pi_2 = (y_j)_{j=0, \dots, k_2}$ heißen *disjunkt*, wenn sie keinen gemeinsamen Knoten besitzen.

Definition: (*Zyklus, Länge eines Zyklus, Schlinge*)

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph und $\pi = (x_i)_{i=0, \dots, k}$ ein Dipfad der Länge k von x_0 nach x_k . Dann ist über $\pi' = (x_i)_{i=0, \dots, k+1}$ mit $x_{k+1} := x_0$ ein *Zyklus* der *Länge* $k+1$ definiert.

Bei dieser Definition besitzen die Zyklen eines Digraphen eine Länge ≥ 1 . Dabei ist jede Schlinge ein Zyklus der Länge 1 und umgekehrt.

Eine besonders wichtige Klasse von Digraphen bilden die azyklischen Digraphen, welche sowohl in der Praxis als auch als Voraussetzung vieler Algorithmen in der Graphentheorie und der theoretischen Informatik auftauchen.

Definition: (*azyklisch, DAG*)

Ein Digraph D heißt *azyklisch*, wenn D keine Zyklen enthält.

Ein azyklischer Digraph wird kurz als *DAG* („directed acyclic graph“) bezeichnet.

Im Zusammenhang mit der Erreichbarkeit über Dipfade und Zyklen seien noch einige wichtige Definitionen über den Zusammenhang von Digraphen angeführt.

Definition: (*zusammenhängend, Komponente*)

Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Knoten $u, v \in V(G)$ ein Pfad in G existiert.

Ein maximaler zusammenhängender Untergraph von G wird als *Komponente* von G bezeichnet.

Diese Begriffe lassen sich auch direkt auf die Menge der Digraphen übertragen, indem die Kantenorientierung vernachlässigt und somit nur der zugrundeliegende Graph betrachtet wird. Dieses Vorgehen liefert die Definition des schwachen Zusammenhangs in Digraphen.

Definition: (*schwach zusammenhängend, schwach zusammenhängende Komponente*)

Ein Digraph D heißt *schwach zusammenhängend*, wenn der zugrundeliegende Graph $U(D)$ zusammenhängend ist.

Ein maximaler schwach zusammenhängender Untergraph von D ist eine *schwach zusammenhängende Komponente* von D .

Wenn die Kantenorientierung nicht vernachlässigt wird, ergibt sich eine stärkere Formulierung des Zusammenhangs von Digraphen, indem die Existenz von Dipfaden zwischen den Knoten den starken Zusammenhang eines Digraphen beschreibt.

Definition: (*stark zusammenhängend, stark zusammenhängende Komponente, SCC*)

Ein Digraph D heißt *stark zusammenhängend*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Knoten $u, v \in V(D)$ in D ein Dipfad von u nach v und ein Dipfad von v nach u existiert.

Ein maximaler stark zusammenhängender Untergraph von D ist eine *stark zusammenhängende Komponente* von D . („strongly connected component“, kurz: *SCC*)

In natürlicher Weise lassen sich die Begriffe über den Zusammenhang von (Di-)Graphen auf Knotenmengen anwenden. Eine Knotenmenge $V \subseteq V(G)$ eines Graphen G ist *zusammenhängend*, wenn der Untergraph $G[V]$ zusammenhängend ist. Analog lassen sich die Begriffe schwach und stark zusammenhängend auf Knotenmengen von Digraphen übertragen.

Weitere wichtige Klassen von Digraphen werden durch die Auszeichnung eines so genannten Wurzelknotens definiert.

Definition: (*Wurzelknoten eines Digraphen*)

Sei D ein Digraph und $r \in V(D)$. Der Knoten r ist genau dann ein *Wurzelknoten* des Digraphen D , falls für jeden anderen Knoten $v \in V(D)$ in D mindestens ein Dipfad von r nach v existiert.

Die Existenz eines Wurzelknotens in einem Digraphen hat allerdings nicht die Eindeutigkeit eines solchen Knotens zur Folge, wie das Beispiel in Abbildung 1.1 demonstriert.

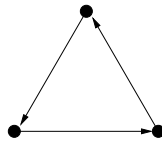


Abbildung 1.1: Beispiel eines Digraphen mit mehreren Wurzelknoten

Aus der Existenz eines initialen Wurzelknotens in einem Digraphen folgt weiterhin noch, dass kein weiterer Wurzelknoten und auch kein weiterer initialer Knoten in dem Digraph existiert, wie die folgende Proposition 1.1.1 zeigt.

1.1.1 Proposition:

Sei D ein Digraph und $r \in V(D)$ ein initialer Wurzelknoten von D , dann folgt:

- a) der Knoten r ist der einzige initiale Knoten in D und
- b) der Knoten r ist der einzige Wurzelknoten in D und
- c) der Knoten r ist der einzige initiale Wurzelknoten in D .

Beweis:

Für die Aussagen a) und b) werde das Gegenteil angenommen.

- a) Angenommen es gibt in D einen weiteren initialen Knoten r' . Weil r ein Wurzelknoten ist und $r \neq r'$ gilt, existiert in D ein Dipfad von r nach r' und es folgt $\text{in}(r') \geq 1$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass r' ein initialer Knoten in D ist. Somit ist r der einzige initiale Knoten in D .
- b) Angenommen es gibt einen weiteren Wurzelknoten $r' \neq r$ in D . Dann existiert in D ein Dipfad von r' nach r und es folgt $\text{in}(r) \geq 1$. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung nach welcher der Knoten r initial ist. Somit ist r der einzige Wurzelknoten in D .

c) Dies folgt direkt aus den Aussagen a) und b) zur Eindeutigkeit. \square

Für Digraphen ohne Zyklen der Länge ≥ 2 ergeben sich sogar folgende Lemmas über die Existenz und Eindeutigkeit von Wurzelknoten und initialen Knoten.

1.1.2 Lemma:

Jeder Digraph ohne Zyklen der Länge ≥ 2 besitzt mindestens einen initialen Knoten.

Beweis:

Angenommen es existiert ein DAG D mit $n := |V(D)|$ ohne initialen Knoten. Dass heißt, für jeden Knoten $v \in V(D)$ ist die Bedingung $\text{in}(v) \geq 1$ erfüllt. O.B.d.A. kann D ohne Mehrfachkanten angenommen werden, da dies keine Auswirkungen auf die Adjazenzrelation hat.

Schritt 0: Wähle einen beliebigen Knoten $v_0 \in V(D_0)$ mit $D_0 := D$. Dabei gilt nach Voraussetzung $\text{in}(v_0) \geq 1$ in D_0 .

Schritt i : Wähle $v_i \in V(D_i)$ mit $D_i := D_{i-1} - v_{i-1}$ und $(v_i, v_{i-1}) \in E(D_{i-1}) \subseteq E(D)$.

Dabei besitzt v_i wiederum $\text{in}(v_i) \geq 1$ in D_{i-1} . Andernfalls gibt es ein $j < i$, so dass $(v_j, v_i) \in E(D)$ gilt, denn in D besaß v_i noch die vorausgesetzte Eigenschaft $\text{in}(v_i) \geq 1$. Dies würde einen Zyklus $v_j, v_i, v_{i-1}, \dots, v_j$ der Länge $i - j$ implizieren und dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass D ein Digraph ohne Zyklen der Länge ≥ 2 sei. \square

Mit dieser Konstruktion wird ein unendlich langer Dipfad in D konstruiert. Weil D aber nur n Knoten besitzt, ist dies nicht möglich und führt zum Widerspruch zur Annahme, dass es keinen initialen Knoten in D gibt. Die Konstruktion ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

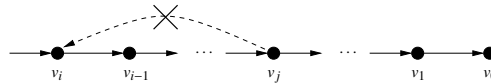


Abbildung 1.2: Konstruktionsschema aus Lemma 1.1.2

1.1.3 Lemma:

Für einen Digraph D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 sind folgende Aussagen äquivalent.

- i) D besitzt einen Wurzelknoten
- ii) D besitzt genau einen Wurzelknoten
- iii) D besitzt genau einen initialen Wurzelknoten
- iv) D besitzt genau einen initialen Knoten

Beweis:

Für die beschriebene Äquivalenz reicht der Beweis folgender Implikationen.

- i) \Rightarrow ii) Angenommen es existieren mehrere Wurzelknoten $r, r' \in V(D)$. Dann existiert ein Dipfad von r nach r' , da r ein Wurzelknoten ist. Außerdem existiert ein Dipfad von r' nach r , weil r' ein Wurzelknoten ist. Damit existiert wegen $r \neq r'$ ein Zyklus der Länge ≥ 2 in D und daher ein Widerspruch.

Damit ist r der einzige Wurzelknoten von D .

- ii) \Rightarrow iii) Angenommen der Wurzelknoten $r \in V(D)$ ist kein initialer Knoten. Dann existiert ein Knoten $v \neq r$ mit einer Kante von v nach r in D . Des Weiteren existiert ein Dipfad von r nach v , da r der Wurzelknoten von D ist. Damit existiert ein Zyklus der Länge ≥ 2 in D und daher ein Widerspruch.

Damit ist r sogar initialer Wurzelknoten von D .

- i) \Leftarrow iii) Folgt bereits nach Definition.

- iii) \Rightarrow iv) Angenommen $r \in V(D)$ ist der einzige initiale Wurzelknoten, aber nicht der einzige initiale Knoten. Das heißt, es gibt einen initialen Knoten $v \in V(D)$. Zu diesem Knoten existiert also kein Knoten $w \neq v$ mit einer Kante von w nach v in D . Damit existiert aber auch kein Dipfad von r nach v , was im Widerspruch zur Annahme steht, dass r ein initialer Wurzelknoten ist.

Damit ist r auch der einzige initiale Knoten in D .

- iii) \Leftarrow iv) Angenommen $r \in V(D)$ ist der einzige initiale Knoten, aber dieser ist kein Wurzelknoten. Dann gibt es einen Knoten $v \in V(D)$, für den kein Dipfad von r nach v existiert.

Analog zum Beweis von Lemma 1.1.2 lässt sich ein Dipfad nach v konstruieren, dessen Ursprung in einem initialen Knoten von D liegt. Da r der einzige initiale Knoten in D ist, existiert entgegen der Annahme ein Dipfad von r nach v .

Damit ist r sogar initialer Wurzelknoten von D . □

Damit ergeben sich einige weitere Klassen von Digraphen, welche in dieser Arbeit von besonderem Interesse sind.

Definition: ((initialer) Wurzel Digraph)

Ein (initialer) Wurzel Digraph D ist ein Digraph mit einem extra ausgezeichneten (initialen) Wurzelknoten $r \in V(D)$.

Der (initiale) Wurzel Digraph D mit Wurzelknoten r ist daher als geordnetes Paar (D, r) schreibbar.

Nachfolgend wird der extra ausgezeichnete Wurzelknoten kurz als der Wurzelknoten des Wurzel Digraphen bezeichnet.

Bei der Definition der Reduzibilität und der Minoren von Graphen und Digraphen wird auf die Kontraktion von Kanten zurückgegriffen, welche hier formal definiert werden sollen.

Definition: (Kontraktion einer Kante, G/e)

Sei $G = (V, E, \mu)$ ein Graph und $e \in E$ mit $\mu(e) = \{x, y\}$. Bei der Kontraktion der Kante e wird ein neuer Knoten $v_e \notin V \cup E$ dem Graphen hinzugefügt, welcher als Nachbarn diejenigen Knoten erhält, die zuvor mit x, y benachbart waren. Schließlich werden x und y aus dem Graphen entfernt. So resultiert der Graph $G/e = (V', E', \mu')$ mit folgender Beschreibung.

- $V' := (V \cup \{v_e\}) \setminus \{x, y\}$
- $E' := E \setminus \{e\}$
- Sei $e' \in E' \subseteq E$, dann ist $\mu'(e') := \begin{cases} \{v_e\} & , \text{ wenn } \mu(e') \in \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\} \\ \{v_e, v\} & , \text{ wenn } \mu(e') = \{x, v\} \text{ mit } v \neq y \\ \{v, v_e\} & , \text{ wenn } \mu(e') = \{v, y\} \text{ mit } v \neq x \\ \mu(e) & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Bemerkung:

Bei der Arbeit mit Kontraktionen hat sich die Kontraktion von e zu einem neuen Knoten v_e zum Teil als unhandlich erwiesen, da der neue Knoten v_e nicht in $V(G)$ enthalten ist. Dabei kann v_e durchaus mit den Endknoten x, y von e identifiziert werden.

Um diese Identifikation zu erleichtern und die Definition zu verkürzen, lässt sich die Kontraktion von e auch zu einem der beiden Endknoten durchführen. Der so entstandene Graph $G' = (V', E', \mu')$ ist nachfolgend beschrieben (o.B.d.A. hier Kontraktion von e zum Endknoten y).

- $V' := V \setminus \{x\}$
- $E' := E \setminus \{e\}$
- Sei $e' \in E' \subseteq E$, dann ist $\mu'(e') := \begin{cases} \{y\} & , \text{ wenn } \mu(e') = \{x\} \\ \{v, y\} & , \text{ wenn } \mu(e') = \{v, x\} \text{ mit } v \neq x \\ \mu(e) & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Der Graph G' ist dabei isomorph zu G/e . Damit lässt sich G' also an Stelle von G/e zur Betrachtung heranziehen, wenn nicht explizit $v_e \notin V \cup E$ gefordert wird. Dies ist insbesondere der Fall, wenn ein Resultat für die gesamte Isomorphieklasse $[G/e]$ formuliert wird und somit unabhängig von der Wahl des Repräsentanten G' bzw. G/e ist.

Analog lassen sich Kantenkontraktionen für Digraphen formulieren.

Definition: (*Kontraktion einer Kante, D/e*)

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph und $e \in E$ mit $\mu(e) = (x, y)$. Bei der *Kontraktion* der Kante e wird ein neuer Knoten $v_e \notin V \cup E$ dem Digraphen hinzugefügt, welcher als Nachbarn diejenigen Knoten erhält, die zuvor mit x, y benachbart waren. Schließlich werden x und y aus dem Digraphen entfernt. So resultiert der Digraph $D/e = (V', E', \mu')$ mit folgender Beschreibung.

- $V' := (V \cup \{v_e\}) \setminus \{x, y\}$
- $E' := E \setminus \{e\}$
- Sei $e' \in E' \subseteq E$, dann ist $\mu'(e') := \begin{cases} (v_e, v_e) & , \text{ wenn } \mu(e') \in \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\} \\ (v, v_e) & , \text{ wenn } \mu(e') \in \{(v, x), (v, y)\} \text{ mit } x \neq v \neq y \\ (v_e, v) & , \text{ wenn } \mu(e') \in \{(x, v), (y, v)\} \text{ mit } x \neq v \neq y \\ \mu(e) & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Bemerkung:

Auch für Digraphen ist die Kontraktion von Kanten zum Anfangsknoten oder Endknoten hilfreich, da sich die Knotenmenge im resultierenden Digraphen lediglich um ein Element verringert, anstatt ein völlig neues Element zu erhalten. Der so entstandene Digraph $D' = (V', E', \mu')$ ist nachfolgend beschrieben (o.B.d.A. hier Kontraktion von e zum Endknoten y).

- $V' := V \setminus \{x\}$
- $E' := E \setminus \{e\}$
- Sei $e' \in E' \subseteq E$, dann ist $\mu'(e') := \begin{cases} (y, y) & , \text{ wenn } \mu(e') = (x, x) \\ (v, y) & , \text{ wenn } \mu(e') = (v, x) \text{ mit } v \neq x \\ (y, v) & , \text{ wenn } \mu(e') = (x, v) \text{ mit } v \neq x \\ \mu(e) & , \text{ sonst.} \end{cases}$

Der Digraph D' ist dabei isomorph zu D/e . Damit lässt sich D' also an Stelle von D/e zur Betrachtung heranziehen, wenn nicht explizit $v_e \notin V \cup E$ gefordert wird. Dies ist insbesondere der Fall, wenn ein Resultat für die gesamte Isomorphieklasse $[D/e]$ formuliert wird und somit unabhängig von der Wahl des Repräsentanten D' bzw. D/e ist.

Sowohl für Graphen als auch für Digraphen lässt sich die Kontraktion mehrerer Kanten in kurzer Notation zusammenfassen.

Definition: (*Kontraktion mehrerer Kanten, G/E*)

Sei G ein (Di-)Graph und $E \subseteq E(G)$. Dann ist G/E der (Di-)Graph, welcher durch Kontraktion aller Kanten in E entsteht.

Formal existiert durch eine Sortierung der endlichen Kantenmenge $E = \{e_1, \dots, e_k\}$ eine Folge $(G_i)_{i=0, \dots, k}$ mit $G_0 := G$ und $G_i := G_{i-1}/e_i$ für jedes $i = 1, \dots, k$. Dann ist schließlich $G/E := G_k$.

1.2 Reduzibilität

Der Begriff der Reduzibilität von Wurzeldigraphen wurde ursprünglich 1970 in der Arbeit „Control Flow Analysis“ von Frances E. Allen [3] im Zusammenhang mit der Optimierung von Compilern geprägt. Darin wurde die Definition für so genannte Kontrollflussgraphen („Control Flow Graphs“) formuliert, welche bei der Analyse des Programmflusses entstehen. In späteren Arbeiten zu diesem Thema wie [11], [29] und [12] wurden so genannte Flussgraphen („Flow Graphs“) verwendet. Während der Begriff der Kontrollflussgraphen direkt mit Programmflüssen zu verbinden ist, werden Flussgraphen auch zur Darstellung allgemeiner Abläufe verwendet. Beide Begriffe bezeichnen einen Digraphen mit einem ausgezeichneten Wurzelknoten und sind daher mit dem Begriff der Wurzeldigraphen in dieser Arbeit gleich zu setzen.

In diesem Kapitel wird die Reduzibilität von Wurzeldigraphen vorgestellt. Dabei lässt sich der Begriff auf zwei recht unterschiedliche Formen herleiten, welche nachfolgend vorgestellt werden. Außerdem wird eine Übersicht über einige ausgewählte Eigenschaften reduzierbarer Wurzeldigraphen zusammengetragen.

Bemerkung:

Die Definitionen der Reduzibilität wurden in der verwendeten Literatur auf der Menge der einfachen Wurzeldigraphen formuliert. Weil die Digraphen dieser Arbeit auch Mehrfachkanten enthalten können, werden die ursprünglichen Definitionen an entsprechender Stelle für Wurzeldigraphen angepasst. Für die ursprünglichen Formulierungen sei auf die jeweils angegebenen Quellen verwiesen.

Die Herleitung der Reduzibilität über Intervalle wird unter Anderem in [3] und [11] vorgestellt.

Definition: (*Intervall, $I(v)$, Intervallkopf; vgl. [3], [11]*)

Sei D ein Wurzeldigraph mit Wurzelknoten r und einem Knoten $v \in V(D)$. Das Intervall $I(v)$ wird über nachfolgenden Algorithmus konstruiert.

- I) Setze $I(v) := \{v\}$.
- II) Falls ein Knoten $u \in V(D) \setminus I(v)$ mit $u \neq r$ und $IN(u) \subseteq I(v)$ existiert, wird u zu $I(v)$ hinzugefügt.
- III) Wiederhole Schritt II) solange, bis kein Knoten mehr zu $I(v)$ hinzugefügt werden kann.

Über die Knotenmenge $I(v)$ ist somit ein eindeutiger Untergraph $D[I(v)]$ mit v als initialen Wurzelknoten definiert. Der Knoten v wird dabei als *Intervallkopf* bezeichnet.

Schließlich lässt sich jeder Wurzeldigraph in eine Menge disjunkter Intervalle zerlegen und führt zum Begriff der Intervallpartition.

Definition: (*Intervallpartition*; vgl. [3], [11])

Sei D ein Wurzeldigraph mit Wurzelknoten r , dann ist durch nachfolgende Konstruktion die *Intervallpartition* von D definiert.

- I) Setze $H := \{ r \}$ als die Liste der Intervallköpfe und $L := \emptyset$ als die Liste der disjunkten Intervalle.
- II) Falls H leer ist, enthält L die gewünschte Intervallpartition. Andernfalls füge für ein $v \in H$ das Intervall $I(v)$ zu L hinzu.
- III) Entferne v aus H und füge alle Knoten aus $OUT(I(v))$ zu H hinzu, welche nicht bereits in H oder einem der Intervalle in L enthalten sind. Wiederhole schließlich Schritt II).

Die Zerlegung der Knotenmenge erfolgte dabei in disjunkte Intervalle und ist eindeutig definiert.

Mit Hilfe der gewonnenen Intervallpartitionen von Wurzeldigraphen lassen sich so genannte abgeleitete Wurzeldigraphen erzeugen.

Definition: (*abgeleiteter Wurzeldigraph*, $I(D)$; vgl. [3], [11])

Der *abgeleitete Wurzeldigraph* $D' = (V', E', \mu')$ eines Wurzeldigraphs $D = (V, E, \mu)$ mit Intervallpartition $I = (I_i)_{i=1, \dots, k}$ ist wie folgt definiert.

- $V' := \{ v_1, \dots, v_k \}$
- $E' := \{ e \in E \mid \text{es existieren } i, j \in \{ 1, \dots, k \} \text{ mit } j \neq i \text{ und } \mu(e) = (u, v) \in (I_i \times I_j) \}$
- $\mu'(e) = (v_i, v_j)$ für $e \in E'$ mit $\mu(e) = (u, v) \in (I_i \times I_j)$

Das heißt, die Knoten des abgeleiteten Wurzeldigraphen D' werden mit den Intervallen der Intervallpartition von D identifiziert und die Kanten zwischen den Knoten verschiedener Intervalle übernommen. Der abgeleitete Wurzeldigraph wird kurz mit $I(D)$ bezeichnet und enthält keine Schlingen mehr.

Definition: (*(intervall-)reduzibel*, *irreduzibel*; vgl. [3], [11])

Sei D ein Wurzeldigraph, dann existiert eine eindeutige Folge $(D_i)_{i=0, \dots, k}$ von Wurzeldigraphen mit den Eigenschaften

- $D_0 := D$,
- $D_i := I(D_{i-1})$ für $i = 1, \dots, k$ und
- $D_k = I(D_k)$.

Der Wurzeldigraph D ist genau dann *(intervall-)reduzibel*, falls D_k nur noch einen einzigen Knoten enthält und somit isomorph zu K_d^1 ist.

Besondere Eigenschaften der Intervalle sind unter Anderem:

- Jeder Zyklus innerhalb eines Intervalls $I(v)$ enthält den Intervallkopf v .

- Jede Kante von $I(u)$ nach $I(v)$ mit $u \neq v$ endet im Intervallkopf v .

In der Arbeit [11] entdeckten die Autoren des Weiteren eine Möglichkeit zur Charakterisierung der Menge (intervall-)reduziblen Wurzeldigraphen durch eine verbotene Unterstruktur.

Definition: (\mathcal{R} , vgl. [11])

Mit \mathcal{R} wird eine ganze Klasse von Digraphen bezeichnet. Die Struktur der Digraphen in \mathcal{R} ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

Dabei kann jede dargestellte Kante durch einen Dipfad der Länge ≥ 1 ersetzt werden, so dass die Mengen mit den inneren Knoten der jeweiligen Ersetzungsdipfade paarweise disjunkt sind und keinen der Knoten r, v, x, y enthalten. Als Ausnahme kann die Kante von r nach v durch einen Dipfad der Länge 0 ersetzt werden, so dass $r = v$ gilt.

Die Klasse \mathcal{R} besteht demnach aus allen Digraphen, die auf diese Weise erzeugt werden können.

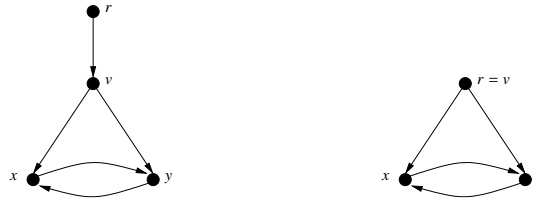


Abbildung 1.3: Struktur der Digraphen in \mathcal{R} und der Sonderfall mit $r = v$

1.2.1 Satz: (vgl. Theorem 6.1 in [11])

Wenn D ein irreduzibler Wurzeldigraph ist, dann besitzt er einen Teilgraphen, welcher zu einem Digraphen aus \mathcal{R} isomorph ist.

1.2.2 Satz: (vgl. Theorem 6.2 in [11])

Wenn ein Wurzeldigraph D einen Teilgraphen enthält, welcher zu einem Digraphen aus \mathcal{R} isomorph ist, dann ist D irreduzibel.

Als direkte Konsequenz aus den beiden Sätzen 1.2.1 und 1.2.2 folgt schließlich der nachfolgende Charakterisierungssatz der reduziblen Wurzeldigraphen.

1.2.3 Satz: (vgl. Theorem 3 in [12])

Ein Wurzeldigraph ist genau dann irreduzibel, wenn er einen Teilgraphen enthält, welcher zu einem Digraphen aus \mathcal{R} isomorph ist.

Eine zweite Variante, über welche die Reduzibilität eingeführt werden kann, erfolgt über spezielle Transformationen.

Definition: (reduzibel, T_1, T_2 ; vgl. [11], [12])

Sei D ein Wurzeldigraph mit Wurzelknoten $r \in V(D)$. Des Weiteren sind folgende Transformationen formuliert, welche auf D und eine Kante $e \in E(D)$ wirken.

T_1 : Löschung der Schlinge e und somit $T_1(D, e) := D - e$.

Diese Transformation ist nur dann anwendbar, falls e eine Schlinge von D ist.

T_2 : Kontraktion von e und somit $T_2(D, e) := D/e$.

Diese Transformation ist nur dann anwendbar, falls e keine Schlinge von D ist. Desweiteren darf der Endknoten v von e keine Schlinge besitzen und es muss $v \neq r$ und $in(v) = 1$ gelten.

Schließlich ist ein D genau dann *reduzibel*, wenn er durch wiederholte Anwendung der Transformationen T_1 und T_2 auf einen Digraphen reduziert werden kann, welcher zum K_d^1 isomorph ist.

Die Folge von Anwendungen der beiden Transformationen lässt sich als Reduktionsfolge in zwei wesentlichen Varianten darstellen.

Definition: (*Reduktionsfolge*)

Sei D ein reduzierbarer Digraph mit $m := |E(D)|$, dann existiert eine Folge von Anwendungen der Transformationen T_1 und T_2 so, dass D auf einen, zum K_d^1 isomorphen, Digraph reduziert wird. Eine solche Folge wird als *Reduktionsfolge* bezeichnet.

Eine Reduktionsfolge kann dabei in zwei verschiedene Formen dargestellt werden.

- Darstellung der Reduktionsfolge als Folge $(D_i)_{i=0,\dots,m}$ der Digraphen, welche durch schrittweise Anwendung der Transformationen entstehen
- Darstellung der Reduktionsfolge als Folge $(e_i)_{i=1,\dots,m}$ der Kanten, welche durch schrittweise Anwendung der Transformationen gelöscht oder kontrahiert werden

Dabei gilt für jedes $i = 1, \dots, m$ die Beziehung $D_i = T_1(D_{i-1}, e_i)$ oder $D_i = T_2(D_{i-1}, e_i)$ mit $D_0 := D$ und $e_i \in D_{i-1}$. Somit sind beide Darstellungen ineinander überführbar.

2 Über Minoren von Graphen

In der Graphentheorie existiert ein sehr verwandtes Konzept zur strukturellen Analyse von Graphen mittels Löschung von Knoten und Kanten sowie Kantenkontraktionen. Dabei handelt es sich um die Minorentheorie von Graphen, welche nachfolgend in groben Zügen dargestellt wird.

Einen Einblick in dieses Gebiet der Graphentheorie bietet zum Beispiel das Buch [8] von Reinhard Diestel, wobei die englische Fassung [9] ausführlicher auf dieses Thema eingeht. Dieser einführenden Literatur liegen vor allem die 23 Veröffentlichungen der Reihe „Graph Minors“ [19] von Neil Robertson und Paul D. Seymour zu Grunde, welche im Zeitraum von 1983 bis 2010 im Journal of Combinatorial Theory erschienen sind.

2.1 Minoren von Graphen

Nachfolgend ist die wohl gebräuchlichste Definition der Minoren eines Graphen angegeben.

Definition: (*Minor, Minorenrelation, \leq*)

Seien G und H Graphen. Dann ist G genau dann ein *Minor* von H , wenn ein Teilgraph H' von H in der Weise existiert, dass durch Kontraktion von Kanten aus H' der Graph G resultiert.

Die Beziehung „ G ist Minor von H “ beschreibt dabei eine Quasiordnung (reflexiv und transitiv) auf der Menge der Graphen. Diese wird als *Minorenrelation* \leq bezeichnet.

Formal bedeutet dies:

$$G \text{ ist Minor von } H \Leftrightarrow G \leq H \Leftrightarrow \exists H' \subseteq H : \exists E \subseteq E(H') : G = H'/E.$$

In Abbildung 2.1 ist ein Beispiel für die Konstruktion eines Minoren dargestellt.

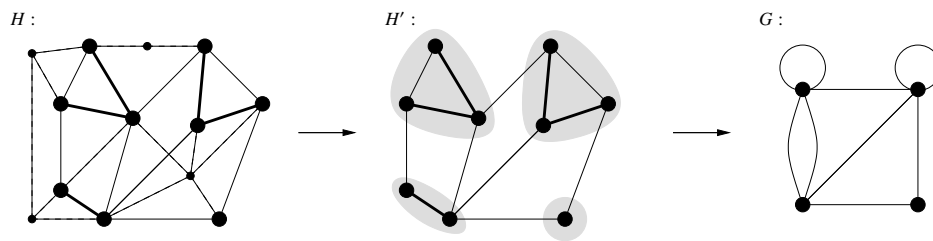


Abbildung 2.1: Beispiel eines Minoren G von Graph H mit $G = H'/E$ und $H' \subseteq H$

Bemerkung:

In der Regel wird die Minorenrelation nicht direkt auf der Menge der Graphen, sondern auf der Menge der Isomorphieklassen betrachtet. Das heißt für Graphen G und H formal:

$$G \text{ ist zu einem Minor von } H \text{ isomorph} \Leftrightarrow \exists \tilde{G} : G \cong \tilde{G} \leq H.$$

Eine weitere Abwandlung, welche häufig in der Literatur wie zum Beispiel in [8] anzutreffen ist, ist die Beschränkung auf schlichte Graphen. Damit sind meist vereinfachte Formulierungen der hier betrachteten Sachverhalte verbunden. Nachfolgend sei eine solche Formulierung für den Begriff des Minoren angeführt.

Definition: (Verzweigungsmenge, Minor eines schlichten Graphs; vgl. [8])

Seien G und H schlichte Graphen. Dann ist G genau dann ein Minor von H , wenn ein Teilgraph H' von H und eine Knotenpartition $W = \{ W_x \subseteq V(H') \mid x \in V(G) \}$ so existiert, dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- Für alle $x \in V(G)$ ist $H'[W_x]$ zusammenhängend.
- Zwischen zwei Knoten $x, y \in V(G)$ gibt es genau dann eine Kante, wenn in H' zwischen W_x und W_y mindestens eine Kante existiert.

Diese Definition ist allerdings nur auf der Menge der schlichten Graphen äquivalent zu der zuvor angegebenen. Auf der Menge der schlichten Graphen lässt sich dabei eine vereinfachte Kantenkontraktion formulieren, bei der Mehrfachkanten und Schlingen, welche bei der normalen Kantenkontraktion entstehen würden, entfernt werden.

Auf der Grundlage der Verzweigungsmengen sind daher alle Minoren eines Graphen schlicht. Damit ergibt sich zwar die Äquivalenz auf der Menge der schlichten Graphen. Allerdings folgt damit auch der Widerspruch auf der Menge der Graphen, denn es existieren im Allgemeinen weitere Minoren, welche nicht schlicht sind.

Das Konzept der Verzweigungsmengen liefert dennoch einen interessanten Blickwinkel, weil damit eine Abbildung zwischen den Knoten eines Minors und den Knoten des Ausgangsgraphen beschrieben ist.

2.1.1 Lemma:

Seien G und H Graphen mit $G \leq H$. Dann existiert ein Teilgraph H' von H und eine surjektive Abbildung $\eta : V(H') \rightarrow V(G)$ mit folgenden Eigenschaften.

- $W = \{ W_x := \eta^{-1}(x) \subseteq V(H') \mid x \in V(G) \}$ ist eine Partition von $V(H')$.
- Für alle $x \in V(G)$ ist $H'[W_x]$ zusammenhängend.
- Zwischen zwei Knoten $x, y \in V(G)$ gibt es genau dann keine Kante, wenn in H' zwischen W_x und W_y keine einzige Kante existiert.

Beweis:

Da G ein Minor von H ist, existiert ein Teilgraph H' von H , so dass durch die Kontraktion von Kanten $F \subseteq E(H')$ der Graph G resultiert. Dann sei $V_F := \{ v \in V(H') \mid \exists e \in F : v \sim e \}$ die Menge aller Knoten aus $V(H')$, welche mit den Kanten aus F inzidieren.

Setze $H'_F := H' - (E(H') \setminus F)$ als den Graphen, welcher durch Beschränkung von H' auf die zu kontrahierenden Kanten in F entsteht. O.B.d.A. werden an dieser Stelle die Kontraktionen zu einem der beiden Endpunkte vorgenommen. Somit existiert in jeder Komponente von H'_F genau ein Knoten, welcher auch in $V(G)$ enthalten ist. Daraus lässt sich eine surjektive Abbildung η wie folgt konstruieren.

$$\eta : V(H') \rightarrow V(G) : x \mapsto \begin{cases} x & , \text{ falls } x \notin V_F \\ y & , \text{ sonst (} y \in V(H') \cap V(G) \text{ aus der Komponente von } x \text{ in } H'_F \text{)} \end{cases}$$

Für jedes $x \in V(G)$ ist $W_x := \eta^{-1}(x)$ eine Komponente von H'_F und $H'[W_x]$ somit zusammenhängend. Für beliebige zwei Knoten $x, y \in V(G)$ sind die Mengen W_x und W_y disjunkt, womit $W = \{ W_x := \eta^{-1}(x) \subseteq V(H') \mid x \in V(G) \}$ tatsächlich eine Partition der Knotenmenge von

H' ist. Zwischen den Knoten x und y existiert dabei genau dann keine Kante in G , wenn zwischen W_x und W_y keine einzige Kante in H' existiert. Somit sind alle Eigenschaften an η erfüllt und die Existenz einer solchen Abbildung bewiesen. \square

Die Mengen $W_x := \eta^{-1}(x)$ sind dabei eine Analogie zu den Verzweigungsmengen bei der Definition des Minorenbegriffs auf der Menge der schlichten Graphen.

Die Umkehrung von Lemma 2.1.1 ist allerdings im Allgemeinen nicht zutreffend. Die Existenz einer solchen Abbildung trifft dabei keine Aussage über die Existenz von Schlingen und die Anzahl von Mehrfachkanten in den Graphen.

Mit Hilfe der Minoren lassen sich nicht nur besondere Strukturen der Graphen näher untersuchen, sondern es ist sogar möglich ganze Klassen von Graphen durch Minoren charakterisieren. Solche Klassen werden dabei zum Beispiel durch gewisse Grapheigenschaften bestimmt. Diejenigen Grapheigenschaften und deren Klassen, welche sich mit Hilfe von Minoren charakterisieren lassen, sind die so genannten erblichen Grapheigenschaften.

Definition: (*erbliche Grapheigenschaft; vgl. [8]*)

Eine Grapheigenschaft \mathcal{P} heißt *erblich*, wenn sie isomorphieinvariant ist und mit jedem Graphen $G \in \mathcal{P}$ auch all dessen Minoren die Eigenschaft \mathcal{P} besitzen. Formal gilt für $H \preceq G$ also

$$\forall H' \cong H : G \in \mathcal{P} \Rightarrow H' \in \mathcal{P}.$$

Die Charakterisierung erfolgt schließlich in der Form einer Menge so genannter verbotener Minoren.

Definition: (*Forb $_{\preceq}(\mathcal{X})$, verbotener Minor; vgl. [8]*)

Sei \mathcal{X} eine Menge oder Klasse von Graphen, so ist durch

$$\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) := \{ G \mid \text{kein } X \in \mathcal{X} \text{ ist zu einem Minor von } G \text{ isomorph} \}$$

eine Grapheigenschaft \mathcal{G} beschrieben.

Die Graphen $X \in \mathcal{X}$ werden in der Darstellung von $\mathcal{G} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ als die *verbotenen Minoren* bezeichnet. Die Grapheigenschaft \mathcal{G} ist somit durch verbotene Minoren darstellbar.

Es lässt sich sogar exakt angeben, wann eine solche Charakterisierung durch verbotene Minoren möglich ist.

2.1.2 Satz: (*vgl. Proposition 10.4.1 in [8]*)

Eine Grapheigenschaft \mathcal{P} eines Graphen ist genau dann *erblich*, wenn sie durch verbotene Minoren darstellbar ist.

Eines der wohl wichtigsten Ergebnisse der Minorentheorie stellt der Minorensatz von Robertson und Seymour dar.

Definition: (*Wohlquasiordnung; vgl. [8]*)

Eine Quasiordnung \leq (reflexiv und transitiv) auf einer Menge X ist eine *Wohlquasiordnung* (und die Elemente von X somit wohlquasiangeordnet), wenn für jede unendliche Folge x_0, x_1, \dots in X Indizes $i < j$ so existieren, dass $x_i \leq x_j$ gilt.

2.1.3 Satz: (*Minorensatz; vgl. 10.5.2 in [8], Folgerung von 10.5 in [26]*)

Sei $(G_i)_{i=1,2,\dots}$ eine abzählbare Folge von Graphen. Dann existieren Indizes $k > j \geq 1$, so dass G_j zu einem Minor von G_k isomorph ist.

Dies beschreibt eine Wohlquasiordnung auf der Menge der Graphen.

Auf Grund seiner Komplexität, wird der Beweis dieses Satzes hier nicht näher dargestellt. Eine Beweisskizze befindet sich unter Anderem in [9]. Für den detaillierten Beweis sei an dieser Stelle auf die Reihe „Graph Minors“ [19] verwiesen, in welcher auch viele Techniken zur Behandlung von Minoren von Graphen entwickelt wurden, die im Rahmen dieser Arbeit nur zum kleinen Teil vorgestellt werden können.

Besonders hilfreich für die Arbeit mit Wohlquasiordnungen ist folgende Proposition 2.1.4.

2.1.4 Proposition: (vgl. Proposition 10.1.1 in [8])

Eine Quasiordnung \leq auf einer Menge X ist genau dann eine Wohlquasiordnung, wenn es in X bezüglich \leq weder eine unendliche Antikette noch eine unendlich absteigende Folge $x_0 > x_1 > \dots$ gibt.

Ein direktes und besonders interessantes Resultat des Minorensatzes ist das folgende Korollar 2.1.5.

2.1.5 Korollar: (vgl. Korollar 10.5.3 in [8])

Jede erbliche Grapheigenschaft \mathcal{P} lässt sich durch eine endliche Menge verbotener Minoren darstellen.

Als eines der bekanntesten Resultate dieses Satzes gilt der Satz von Kuratowski über die Charakterisierung der Planarität (Plättbarkeit) von Graphen durch nur zwei verbotene Minoren.

2.1.6 Satz: (Satz von Kuratowski; vgl. Satz 3.4.6 in [8])

Ein Graph ist genau dann planar (plättbar), wenn jeder seiner Minoren weder zum K^5 noch zum $K_{3,3}$ isomorph ist.

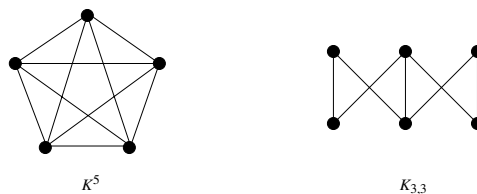


Abbildung 2.2: die Graphen K^5 und $K_{3,3}$ aus Satz 2.1.6

2.2 Topologische Minoren von Graphen

Eine besondere Variante der Minoren sind die so genannten topologischen Minoren und die dazugehörige topologische Minorenrelation. In diesem Spezialfall werden nicht mehr alle Kantenkontraktionen zugelassen und es erfolgt eine Beschränkung auf Kontraktionen von so genannten Unterteilungen.

Definition: (Unterteilung, Unterteilungsknoten, Verzweigungsknoten; vgl. [8])

Seien G und H Graphen. Dann ist H eine Unterteilung von G , wenn die Kanten von G so durch Pfade der Länge ≥ 1 ersetzt werden können, dass der Graph H resultiert.

Bei der Ersetzung einer Kante $e \in E(G)$ mit $\mu(e) = \{x, y\}$ durch einen Pfad der Länge $k \geq 1$ werden nachfolgende Änderungen an $G = (V, E, \mu)$ durchgeführt, so dass daraus die Unterteilung $G' = (V', E', \mu')$ von G entsteht.

- $V' := V \dot{\cup} \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$
- $E' := E \dot{\cup} \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$
- $\mu'(e') = \begin{cases} \mu(e') & , \text{ für } e' \in E \setminus \{e\} \\ \{x, x_1\} & , \text{ für } e' = e \\ \{x_i, x_{i+1}\} & , \text{ für } e' = e_i \text{ mit } i = 1, \dots, k-2 \\ \{x_{k-1}, y\} & , \text{ für } e' = e_{k-1} \end{cases}$

Dabei werden die Knoten in $V(G) \subseteq V(H)$ als *Verzweigungsknoten* und die Knoten in $V(H) \setminus V(G)$ als *Unterteilungsknoten* bezeichnet. Dabei besitzen die Verzweigungsknoten den gleichen Grad wie in G und die Unterteilungsknoten besitzen den Grad 2.

Eine etwas andere Notation ist in [23] zu finden und basiert auf der schrittweisen Unterteilung der Kanten.

Definition: (*Unterteilung*; vgl. [23])

Eine *Unterteilung* eines Graphen G ist ein Graph H , welcher durch wiederholte Ersetzungen von je einer Kante durch ein aufeinanderfolgendes Kantenpaar entsteht.

Die Ersetzung einer einzelnen Kante entspricht bei dieser Notation dem Spezialfall, dass ein Pfad der Länge 1 durch einen Pfad der Länge 2 ersetzt wird.

Die Konstruktion einer Unterteilung wird in Abbildung 2.3 deutlich. Mit dem Begriff der Unterteilung ist es nun möglich, den Begriff des topologischen Minors zu formulieren.

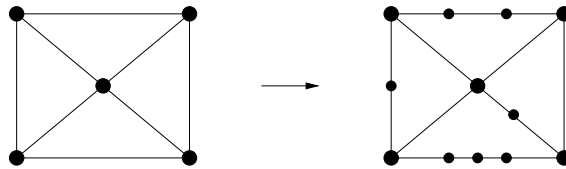


Abbildung 2.3: Beispiel für eine Unterteilung eines Graphen

Definition: (*topologischer Minor*; *topologische Minorenrelation*, \leq_t ; vgl. [8], [23])

Seien G und H Graphen. So ist G genau dann ein *topologischer Minor* von H , wenn ein Teilgraph H' von H existiert, so dass dieser eine Unterteilung von G ist.

Die Beziehung „ G ist topologischer Minor von H “ beschreibt dabei eine Quasiordnung (reflexiv und transitiv) auf der Menge der Graphen. Diese wird als *topologische Minorenrelation* \leq_t bezeichnet. Formal bedeutet dies:

$$G \text{ ist topologischer Minor von } H \quad \Leftrightarrow \quad G \leq_t H .$$

Offensichtlich besitzt jede Kante, welche durch eine Unterteilung hinzugefügt wurde, einen Unterteilungsknoten als Endknoten. Daher besitzt jede dieser Kanten einen Endknoten vom Grad 2.

2.2.1 Proposition: (vgl. Proposition 0.7.2 in [8] für schlichte Graphen)

Sei H ein Graph, dann ist jeder topologische Minor G von H auch ein (gewöhnlicher) Minor von H . Das heißt formal, aus $G \leq_t H$ folgt stets $G \leq H$.

Beweis:

Ist G ein topologischer Minor von H , so existiert ein Teilgraph H' von H als Unterteilung von G . Das heißt, die Kanten von G werden durch Pfade ersetzt, wobei neue Knoten (Unterteilungsknoten) hinzugefügt und mit neuen Kanten verbunden werden. Diese hinzugefügten Kanten bilden dabei die Menge $E := E(H') \setminus E(G)$. Durch Kontraktion der Kanten E in H' entsteht als Umkehrung der Unterteilung der Graph $G = H'/E \subseteq H$. Somit ist G ein Minor von H . \square

2.3 Baumzerlegung und Baumweite $tw(G)$

Ein inzwischen viel genutztes Hilfsmittel der Minorentheorie von Graphen sind die so genannten Baumzerlegungen und die Baumweite. Dabei wurden die Begriffe der Baumzerlegung und Baumweite bereits 1976 unter anderer Bezeichnung von Rudolf Halin in seiner Arbeit [10] eingeführt und untersucht. Danach gerieten sie zunächst in Vergessenheit, bis sie 1983 von Neil Robertson und Paul Seymour in den Arbeiten [21] und [20] wiederentdeckt wurden und inzwischen weit verbreitet sind.

Definition: (*Baumzerlegung, Baumweite*; vgl. [8], [20])

Eine *Baumzerlegung* eines Graphen G ist ein geordnetes Paar (T, W) . Dabei sind T ein Baum und $W = (W_t)_{t \in V(T)}$ eine Familie von Knotenmengen von G mit folgenden Eigenschaften.

$$(T1) \quad \bigcup_{t \in V(T)} W_t = V(G)$$

(T2) Für jede Kante $e \in E(G)$ mit Endknoten u und v gibt es ein $t \in V(T)$ mit $u, v \in W_t$.

(T3) Seien $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$ und liegt t_2 auf dem Pfad von t_1 nach t_3 , dann gilt $W_{t_1} \cap W_{t_3} \subseteq W_{t_2}$.

Sei (T, W) eine Baumzerlegung von G , so ist die Weite dieser Baumzerlegung definiert als

$$\max \{ |W_t| - 1 \mid t \in V(T) \} .$$

Die *Baumweite* $tw(G)$ eines Graphen G ist schließlich die minimale Weite einer Baumzerlegung von G .

Bei dieser Definition sorgen die Bedingungen (T1) und (T2) dafür, dass die Vereinigung der Untergraphen $G[W_t]$ den Graphen G ergibt. Währenddessen stellen die Bedingungen (T2) und (T3) sicher, dass die Gestalt von G grob der Struktur von T entspricht. In Abbildung 2.4 ist eine Beispiel für eine solche Baumzerlegung dargestellt. Dabei werden hier die Mengen aus W direkt neben den entsprechenden Knoten des Baumes T notiert.

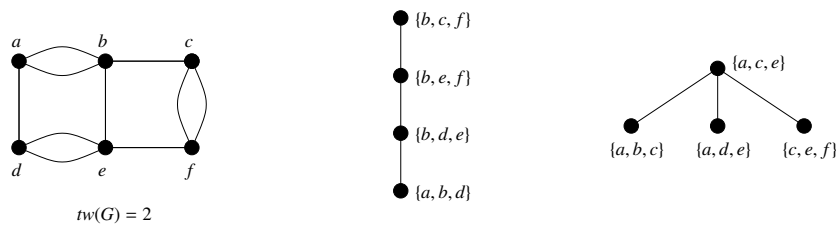


Abbildung 2.4: Beispiel für zwei mögliche Baumzerlegungen von G mit Weite 2

2.3.1 Lemma:

Sei (T, W) eine Baumzerlegung eines Graphen G , dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (T3) Seien $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$ und liegt t_2 auf dem Pfad von t_1 nach t_3 , dann gilt $W_{t_1} \cap W_{t_3} \subseteq W_{t_2}$.
- (T3') Für jeden Knoten $x \in V(G)$ bildet die Knotenmenge $V_x := \{t \in V(T) \mid x \in W_t\}$ mit $T[V_x]$ einen zusammenhängenden Teilbaum von T .

Beweis:

Angenommen (T3) gilt und (T3') nicht. Dann existiert ein $x \in V(G)$, so dass V_x keinen zusammenhängenden Teilbaum von T bildet und es gibt in $T[V_x]$ mehr als nur eine Komponente.

Seien T_1 und T_2 nun zwei dieser Komponenten und $t_1 \in V(T_1) \subseteq V(T)$ und $t_2 \in V(T_2) \subseteq V(T)$ beliebig. Da t_1 und t_2 in verschiedenen Komponenten liegen, existiert in $T[V_x]$ kein Pfad zwischen ihnen.

Allerdings ist T ein Baum und es existiert somit in T ein eindeutiger Pfad von t_1 nach t_2 . Weil T_1 und T_2 aber nicht in $T[V_x]$ zusammenhängen, überquert dieser Pfad mindestens einen Knoten t_3 aus $V(T) \setminus V_x$. Damit folgt $x \notin W_{t_3}$ und steht im Widerspruch zur Annahme, dass (T3) und somit $x \in W_{t_1} \cap W_{t_2} \subseteq W_{t_3}$ gilt. Es folgt daher die Gültigkeit von (T3').

Angenommen (T3') ist erfüllt. Es seien $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$, wobei t_2 auf dem Weg von t_1 nach t_3 liegt. Für jedes $x \in W_{t_1} \cap W_{t_3} \subseteq V(G)$ gilt dabei $t_1, t_3 \in V_x$. Nach (T3') ist $T[V_x]$ ein zusammenhängender Teilbaum von T und jeder Knoten $t_2 \in V(T)$, entlang des eindeutigen Pfades von t_1 nach t_3 , ist ebenfalls in V_x enthalten. Daraus folgt $x \in W_{t_2}$ und daher (T3) mit $W_{t_1} \cap W_{t_3} \subseteq W_{t_2}$.

Damit sind (T3) und (T3') äquivalent. □

Daher lässt sich alternativ eine äquivalente Definition der Baumzerlegung und Baumweite eines Graphen formulieren.

Definition: (Baumzerlegung; vgl. [27])

Eine Baumzerlegung eines Graphen G ist ein geordnetes (T, W) . Dabei sind T ein Baum und $W = (W_t)_{t \in V(T)}$ eine Familie von Knotenmengen von G mit folgenden Eigenschaften.

- (T1) $\bigcup_{t \in V(T)} W_t = V(G)$
- (T2) Für jede Kante $e \in E(G)$ mit Endknoten u und v gibt es ein $t \in V(T)$ mit $u, v \in W_t$.
- (T3') Für jeden Knoten $x \in V(G)$ bildet die Knotenmenge $V_x := \{t \in V(T) \mid x \in W_t\}$ mit $T[V_x]$ einen zusammenhängenden Teilbaum von T .

Grob gesprochen folgt aus einer möglichst kleinen Baumweite eine große Ähnlichkeit zu einer Baumstruktur. Mit Hilfe von Baumzerlegungen ist es demzufolge möglich, vorteilhafte Aspekte von Bäumen auf allgemeinere Graphen zu übertragen. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die Trennungseigenschaft von Bäumen, welche im nachfolgenden Lemma 2.3.2 vorgestellt wird.

2.3.2 Lemma: (Trennungslemma; vgl. Lemma 10.3.1 in [8])

Es sei (T, W) eine Baumzerlegung des Graphen G . Seien weiterhin $t_1, t_2 \in V(T)$ und $e \in E(T)$ die Kante zwischen t_1 und t_2 , dann zerfällt $T - e$ in genau zwei Komponenten T_1 und T_2 . Außerdem trennt $W_{t_1} \cap W_{t_2}$ die Knotenmengen $U_1 := \bigcup_{t \in V(T_1)} W_t$ und $U_2 := \bigcup_{t \in V(T_2)} W_t$ in G .

Für die Minorentheorie von Graphen ist die Baumweite aber erst mit der folgenden Proposition 2.3.3 nutzbar.

2.3.3 Proposition: (vgl. 1.3 in [22], Proposition 10.3.5 in [8])

Für Graphen G und H mit $G \leq H$ folgt stets $tw(G) \leq tw(H)$.

Das heißt aber auch, dass eine beschränkte Baumweite eine erbliche Grapheigenschaft ist. Im Sinne verbotener Minoren folgt einer der wichtigsten Sätze der Minorentheorie von Graphen.

2.3.4 Satz: (vgl. 2.1 in [22])

Sei G ein planarer Graph, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph H , der keinen zu G isomorphen Minor besitzt, eine Baumweite $\leq k$ hat.

Folgendes Korollar 2.3.5 stellt eine äquivalente Formulierung von Satz 2.3.4 dar und wird daher häufig stellvertretend für die ursprüngliche Formulierung verwendet.

2.3.5 Korollar: (vgl. Satz 10.4.3 in [8], Theorem 12.4.3 in [9])

Sei H ein Graph, dann ist die Baumweite der Graphen in $\text{Forb}_{\leq}(H)$ genau dann beschränkt, wenn H planar ist.

2.4 Wegzerlegung und Wegbreite $pw(G)$

Einen Spezialfall der Baumzerlegungen von Graphen stellen die Wegzerlegungen dar, welche ursprünglich in [18] vorgestellt und untersucht wurden. Dabei werden nicht mehr alle Bäume als Struktur für die Zerlegung zugelassen, sondern nur noch Wege, welche als Spezialfall der Bäume gelten. Die Knotenmengen der Zerlegung lassen sich dabei einfach als Folge betrachten und notieren.

Definition: (Wegzerlegung, Wegbreite; vgl. [18], [8])

Eine Wegzerlegung eines Graphen G ist ein geordnetes Paar (P, W) . Dabei sind P ein Weg mit Knotenmenge $V(P) = \{x_1, \dots, x_k\}$ (in natürlicher Reihenfolge entlang des Weges) und $W = (W_i)_{i=1, \dots, k}$ eine Familie von Knotenmengen von G mit folgenden Eigenschaften.

(W1) Für jede Kante $e \in E(G)$ mit Endknoten u und v gibt es ein W_i mit $1 \leq i \leq k$, so dass $u, v \in W_i$ gilt.

(W2) Seien $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq k$, dann gilt $W_{i_1} \cap W_{i_3} \subseteq W_{i_2}$.

Sei (P, W) eine Wegzerlegung von G , so ist die Breite dieser Wegzerlegung definiert als

$$\max \{ |W_i| - 1 \mid 1 \leq i \leq k \}.$$

Die Wegbreite $pw(G)$ eines Graphen G ist schließlich die minimale Breite einer Wegzerlegung von G .

Viele Aspekte der Baumzerlegungen lassen sich in gleicher oder ähnlicher Weise auf Wegzerlegungen übertragen. So ist es unter Anderem möglich, ähnliche Aussagen wie in Satz 2.3.4 bzw. Korollar 2.3.5 zu formulieren.

2.4.1 Satz: (vgl. 1.1 in [18])

Sei G ein Wald, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph, der keinen zu G isomorphen Minor besitzt, eine Wegbreite $\leq k$ hat.

2.4.2 Korollar: (vgl. Satz 10.4.4 in [8])

Sei H ein Graph, dann ist die Wegbreite der Graphen in $\text{Forb}_{\leq}(H)$ genau dann beschränkt, wenn H ein Wald ist.

2.5 Räuber-und-Gendarmen-Spiele auf Graphen

Räuber-und-Gendarmen-Spiele auf Graphen werden nicht nur wegen ihrer intuitiven Verständlichkeit untersucht, sondern auch wegen den starken Verbindungen zu Baumzerlegungen und zur Baumweite. So führen die gegensätzlichen Strategien der Gendarmen und des Räubers zu dualen Aussagen über die Existenz einer Baumzerlegung einer gewissen Weite oder eines so genannten Havens bestimmter Ordnung. Daher werden diese Räuber-und-Gendarmen-Spiele hier näher vorgestellt. Diese Spiele wurden vor allem in [28] untersucht und mit der Minorentheorie von Graphen in Verbindung gebracht.

Das Spiel wird von zwei Spielern gespielt. Der eine Spieler setzt einen Räuber und der andere setzt bis zu k Gendarmen. Das Spielfeld ist dabei ein Graph G . Dem Räuber steht es frei, sich zu jedem Zeitpunkt des Spiels zwischen den Knoten des Graphen zu bewegen, solange ein Pfad zwischen Ausgangs- und Zielknoten existiert, der keinen Knoten der Gendarmen enthält. Das heißt, der Räuber ist an das zugrundeliegende Spielfeld gebunden.

Die Gendarmen hingegen wechseln bei einer Änderung ihrer Position zunächst in einen Helikopter und landen direkt am Zielknoten. Damit ist der Bewegungsfreiraum der Gendarmen nicht an das Spielfeld gebunden. Allerdings geben die Gendarmen, welche in den Helikopter wechseln, die zuvor besetzten Knoten solange frei, bis sie wieder landen. Dem Räuber steht es frei, noch vor der Landung der Gendarmen seine Position zu wechseln und den eventuell neu entstandenen Fluchtweg zu nutzen.

Eine formale Definition eines solchen Spiels lautet damit wie folgt.

Definition: (*Räuber-und-Gendarmen-Spiel, Position; vgl. [28]*)

Sei $G = (V, E, \mu)$ ein Graph. Dann ist das *Räuber-und-Gendarmen-Spiel* mit k Gendarmen wie folgt definiert.

- Die Gendarmen wählen ein $X_0 \in [V]^{\leq k}$ und der Räuber wählt einen Knoten $r_0 \in V - X_0$. Dies bezeichnet die *Position* (X_0, r_0) . ($[V]^{\leq k}$ bezeichnet die Menge aller höchstens k -elementigen Teilmengen von V)
- Sei (X_i, r_i) die aktuelle Position und $r_i \notin X_i$. Dann wählen die Gendarmen ein $X_{i+1} \in [V]^{\leq k}$ und der Räuber einen Knoten r_{i+1} so, dass ein Pfad von r_i nach r_{i+1} existiert, der keinen Knoten aus $X_i \cap X_{i+1}$ enthält.
- Sei (X_i, r_i) die aktuelle Position und $r_i \in X_i$, dann haben die Gendarmen den Räuber gefangen und die Gendarmen somit gewonnen.

Dabei ist den Gendarmen zu jeder Zeit die aktuelle Position des Räubers bekannt. Das heißt, der Räuber ist für die Gendarmen sichtbar.

Gespielt wird schließlich in Partien.

Definition: (*Partie*)

Eine *Partie* ist eine (endliche oder unendliche) Folge $\pi := (X_0, r_0), (X_1, r_1), \dots$ von Positionen, so dass der Übergang von (X_i, r_i) zu (X_{i+1}, r_{i+1}) einen gültigen Zug darstellt. Der Ausgang einer Partie gestaltet sich wie folgt.

- Die Gendarmen gewinnen die Partie, wenn die Partie endlich ist und somit das X_n in der letzten Position den Knoten r_n enthält.
- Der Räuber gewinnt die Partie, wenn die Partie unendlich ist.

Bei der Betrachtung solcher Räuber-und-Gendarmen-Spiele ist die Frage naheliegend, ob für die beiden Spielparteien Strategien existieren, mit denen sie das Spiel immer gewinnen. Nachfolgend wird zunächst definiert, wie eine solche Strategie für die Gendarmen aussieht.

Definition: (*Strategie, τ -konsistente Partie, Gewinnstrategie (für k Gendarmen)*)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine *Strategie* für k Gendarmen ist eine Abbildung $\tau : [V]^{\leq k} \times V \mapsto [V]^{\leq k}$.
- Eine Partie $\pi = (X_0, r_0), (X_1, r_1), \dots$ ist τ -konsistent, wenn $X_{i+1} = \tau(X_i, r_i)$ für alle $i \geq 0$ erfüllt ist. (Für endliche Partien gelte zudem $i < n$.)
- Eine Strategie τ heißt *Gewinnstrategie*, falls jede τ -konsistente Partie endlich ist und somit von den Gendarmen gewonnen wird.

Für die Gendarmen sind dabei insbesondere solche Strategien von Interesse, welche eine gewisse Monotonie aufweisen und daher stärkere Aussagen über den Aufwand der Suche zulassen.

Definition: (*Gendarmen-monotone Strategie, Räuber-monotone Strategie*)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und τ eine Strategie für k Gendarmen.

- Die Strategie τ ist *Gendarmen-monoton*, wenn in jeder τ -konsistenten Partie von den Gendarmen kein Knoten erneut besetzt wird, welcher zuvor bereits wieder freigegeben wurde.
- Die Strategie τ ist *Räuber-monoton*, wenn in jeder τ -konsistenten Partie die vom Räuber erreichbare Knotenmenge nicht vergrößert wird.

Das heißt, die Folge der Positionen $(X_i)_{i=0,1,\dots}$ der Gendarmen erzeugt eine Folge von Komponenten $C = (C_i \subseteq G - X_i)_{i=0,1,\dots}$, in welchen sich der Räuber im jeweiligen Zug aufhalten kann. Bei einer Räuber-monotonen Strategie bildet C eine nicht-wachsende Folge.

Definition: (*Gendarmenzahl, $cn(G)$*)

Die *Gendarmenzahl* eines Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf dem Graph G ist die minimale Anzahl von Gendarmen $k \in \mathbb{N}$, so dass die Gendarmen eine Gewinnstrategie besitzen. Die Gendarmenzahl von G wird dabei mit $cn(G) := k$ („cop number“) bezeichnet.

Die formale Definition einer Gewinnstrategie für den Räuber ist auf ziemlich ähnliche Weise möglich.

Definition: (*Strategie, σ -konsistente Partie, Gewinnstrategie für den Räuber*)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine *Strategie* für den Räuber ist eine Abbildung σ , welche jedem $X \in [V]^{\leq k}$ eine Knotenmenge $R \subseteq V \setminus X$ so zuordnet, dass für alle $X \subseteq Y \in [V]^{\leq k}$ die Beziehung $\sigma(X) \supseteq \sigma(Y)$ erfüllt ist.
- Eine Partie $\pi = (X_0, r_0), (X_1, r_1), \dots$ ist σ -konsistent, wenn $r_i \in \sigma(X_i) \subseteq \sigma(X_i \cap X_{i+1})$ und $r_{i+1} \in \sigma(X_i \cap X_{i+1})$ für alle i erfüllt ist. (Für endliche Partien gelte $i < n$.)
- Eine Strategie σ heißt *Gewinnstrategie*, falls jede σ -konsistente Partie unendlich ist und somit vom Räuber gewonnen wird.

Eine Strategie für den Räuber gibt dabei also keinen konkreten Knoten zur Flucht aus einer Position vor, sondern liefert eine ganze Menge von Zufluchtsorten, aus denen die Position des Räubers gewählt werden kann.

Sinnvoll ist dabei die Formulierung, dass für alle $X \subseteq Y \in [V]^{\leq k}$ die Beziehung $\sigma(X) \supseteq \sigma(Y)$ erfüllt sein soll. Ohne diese Forderung wären zwar komplexere Strategien denkbar, welche allerdings einen entscheidenden Nachteil besitzen.

Angenommen die Gendarmen haben die Knotenmenge $Y \in [V]^{\leq k}$ besetzt und der Räuber hat $y \in \sigma(Y)$ als Position eingenommen. Wenn nun die Gendarmen die Knotenmenge $Y \setminus X$ freigeben, um zur neuen Position zu gelangen und dabei $X \subseteq Y$ weiterhin besetzt halten, ist es mit obiger Bedingung für σ dem Räuber freigestellt die Position beizubehalten, da $y \in \sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$ gilt.

Wird die Bedingung vernachlässigt, so entsteht im Falle von $y \notin \sigma(Y) \cap \sigma(X)$ ein unnötiger Zugzwang für den Spieler des Räubers. Damit sind zwar komplexere Strategien möglich, aber durch Hinzunahme der Freiheit, die Position beizubehalten, entsteht ohne Einschränkung der möglichen Partien der obige Begriff einer Strategie für den Spieler des Räubers.

2.5.1 Lemma: (vgl. 1.1 in [28])

Ein Räuber-und-Gendarmen-Spiel mit k Gendarmen auf einem Graph G besitzt genau dann eine Gewinnstrategie für den Räuber, wenn eine Abbildung σ existiert, welche jedes $X \in [V]^{\leq k}$ auf eine nichtleere Vereinigung von Komponenten aus $G - X$ abbildet und die für $X \subseteq Y \in [V]^{\leq k}$ folgende Bedingungen erfüllt.

- (i) $\sigma(X) \supseteq \sigma(Y)$
- (ii) Für jedes $x \in \sigma(X)$ existiert ein $y \in \sigma(Y)$, so dass zwischen y und x in $G - X$ ein Pfad existiert.

Diese Formulierung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz einer Gewinnstrategie des Räubers wurde sogar noch weiter verfeinert. So entstand der Begriff des Havens.

Definition: (Haven in Graphen)

Sei G ein Graph und $w \in \mathbb{N}_0$. Ein Haven („Zufluchtsort“) der Ordnung w in G ist eine Abbildung β , welche jedem $Z \subseteq V(G)$ mit $|Z| < w$ die Knotenmenge einer Komponente aus $G - Z$ so zuordnet, dass die nachfolgende Bedingung erfüllt ist.

$$\text{Sei } Z' \subseteq Z \subseteq V(G) \text{ mit } |Z| < w, \text{ dann folgt } \beta(Z) \subseteq \beta(Z'). \quad (\text{Haven1})$$

Dabei verschärft die Definition der Havens die Anforderungen für die Existenz einer Gewinnstrategie. Folgender Satz 2.5.2 zeigt jedoch, dass diese Verschärfung die Existenz einer Gewinnstrategie für den Räuber erhält. Des Weiteren wird darin der Bezug zur Baumweite des Graphen hergestellt.

2.5.2 Satz: (vgl. 1.4 in [28])

Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- Der Graph G besitzt eine Baumweite $< k - 1$.
- Der Graph G besitzt einen Haven der Ordnung $< k$.
- Es existiert eine Gewinnstrategie für $\geq k$ Gendarmen.
- Es existiert eine Gendarmen-monotone Gewinnstrategie für $\geq k$ Gendarmen.
- Es existiert eine Räuber-monotone Gewinnstrategie für $\geq k$ Gendarmen.

- Es existiert keine Gewinnstrategie für den Räuber gegen $\geq k$ Gendarmen.

Zwischen der Existenz eines Havens einer gewissen Ordnung besteht dabei ein duales Verhältnis zur Baumweite des Graphen, welches direkt aus Satz 2.5.2 folgt.

2.5.3 Korollar: (vgl. 1.1 in [15])

Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Es existiert genau dann ein Haven der Ordnung k in G , wenn die Baumweite von G mindestens $k - 1$ beträgt.

Es gibt noch eine Reihe anderer Spielvarianten, die in dieser Arbeit allerdings keine Anwendung finden. Die bekanntesten sind vor allem diejenigen, bei denen der Räuber gegenüber den Gendarmen unsichtbar ist. Jede Gewinnstrategie der Gendarmen, um den Räuber zu fassen, entspricht in dieser Spielvariante dabei einer systematischen Suche über den gesamten Graphen.

2.6 Resultate und Anwendungen

In diesem Kapitel werden einige ausgewählte Resultate der Minorentheorie von Graphen vorgestellt. Dabei liegt das Augenmerk auf der Existenz effektiver Algorithmen zur Lösung komplexer Probleme in der Graphentheorie und auch in der praxisnahen Anwendung.

Für folgende Liste von Problemen wurde die Existenz eines Algorithmus mit kubischer Laufzeit nachgewiesen und sind aus [24] entnommen.

- Sei H ein fest gewählter Graph.
Eingabe: ein Graph G
Frage: Existiert ein Teilgraph von G , welcher zu einer Unterteilung von H isomorph ist?
- Sei H ein fest gewählter Graph.
Eingabe: ein Graph G
Frage: Existiert ein Minor von G , welcher zu H isomorph ist?
- Sei \mathcal{F} eine Klasse von Graphen, die eine erbliche Grapheigenschaft beschreibt.
Eingabe: ein Graph G
Frage: Ist G in \mathcal{F} enthalten?

Im letzten Problem ist unter Umständen sogar die Existenz eines noch effizienteren Algorithmus nachweisbar.

2.6.1 Satz: (vgl. Theorem 5.4 in [7])

Sei \mathcal{F} eine Klasse von Graphen, die eine erbliche Grapheigenschaft beschreibt und nicht alle planaren Graphen beinhaltet. Dann existiert ein Algorithmus, welcher mit linearem Zeitaufwand entscheidet, ob ein gegebener Graph G in \mathcal{F} enthalten ist.

Im allgemeinen ist es ein NP-vollständiges Problem, für einen Graphen G und einem $k \in \mathbb{N}$ zu überprüfen, ob $tw(G) \leq k$ gilt [7]. Wird allerdings das k fest gewählt, so existiert für dieses k ein besserer Algorithmus.

Für fest gewähltes $k \in \mathbb{N}$ ist in [24] ein Algorithmus beschrieben, welcher zunächst eine Baumzerlegung der Weite $\leq 4k + 3$ konstruiert und dabei einen Zeitaufwand von $O(n^2)$ besitzt. Um zu entscheiden, ob $tw(G) \leq k$ gilt, reicht es nun den Graphen G auf die verbotenen Minoren für die Klasse der

Graphen mit Baumweite $\leq k$ zu testen. Dies ist aber nach Satz 2.6.1 bereits mit linearem Zeitaufwand möglich ist.

Allerdings ist damit nur die Existenz eines solchen Algorithmus bewiesen, aber nicht des konkrete Konstruktion, denn zunächst gilt es die Menge der zu testenden verbotenen Minoren aufzustellen.

In [7] werden weitere Ansätze besprochen, die allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

3 Über Minoren von Digraphen

Ein weiterer Schritt ist die Übertragung der Begriffe und Resultate aus der Minorentheorie von Graphen auf die Menge der Digraphen. In den Veröffentlichungen der Reihe „Graph Minors“ [19] von Neil Robertson und Paul D. Seymour wurden bereits einige Ansätze in diese Richtung unternommen, wobei der Fokus dieser Reihe vorwiegend auf der Menge der Graphen lag.

In diesem Kapitel werden die bisherigen Bemühungen in der Theorie der Minoren von Digraphen dargestellt. Des Weiteren werden die Probleme, welche sich bei der Formulierung einer gerichteten Variante der Baumweite ergeben, näher untersucht. Dabei wird die Ähnlichkeit zu gerichteten Varianten des Räuber-und-Gendarmen-Spiels eine zentrale Rolle spielen.

In den letzten Abschnitten dieses Kapitels werden schließlich verschiedene Varianten einer eingeschränkten Minorenrelation vorgestellt und auf ihre Verträglichkeit mit den gerichteten Varianten der Baumweite untersucht.

3.1 Übertragung der Minorenrelation auf Digraphen

Eine der ersten Formulierungen des Minorenbegriffs für einen Digraphen ist in [26] zu finden und stellt dabei eine direkte Übertragung der Definition von Minoren eines Graphen auf Digraphen dar.

Definition: (*Minor, Minorenrelation, \leq ; vgl. [26]*)

Seien G und H Digraphen. Dann ist G genau dann ein *Minor* von H , wenn ein Teilgraph H' von H in der Weise existiert, dass durch Kontraktion von Kanten aus H' der Digraph G resultiert.

Die Beziehung „ G ist Minor von H “ beschreibt dabei eine Quasiordnung (reflexiv und transitiv) auf der Menge der Digraphen. Diese wird als *Minorenrelation* \leq bezeichnet.

Formal bedeutet dies:

$$G \text{ ist Minor von } H \Leftrightarrow G \leq H \Leftrightarrow \exists H' \subseteq H : \exists E \subseteq E(H') : G = H' / E .$$

Ein Beispiel für einen Minor eines Digraphen ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Dabei sind die Digraphen darin eine Orientierung des Beispiels in Abbildung 2.1.

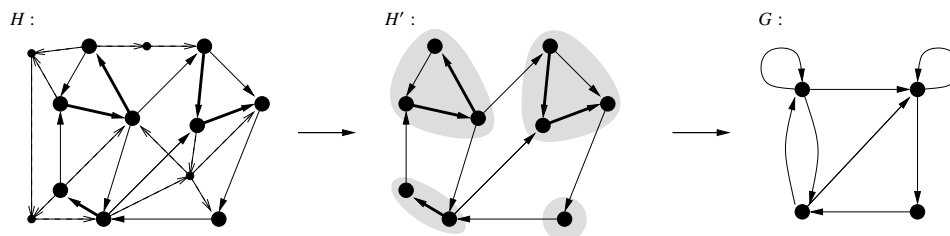


Abbildung 3.1: Beispiel eines Minoren G von Digraph H mit $H \supseteq H'$ und $H' / E = G$

Mit Hilfe der Minorenrelation für Digraphen ist nun auch die Definition erblicher Digrapheigenschaften möglich.

Definition: (erbliche Digrapheigenschaft, $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$, verbotener Minor)

Eine Digrapheigenschaft \mathcal{P} heißt *erblich*, wenn sie isomorphieinvariant ist und mit jedem Digraphen $G \in \mathcal{P}$ auch all dessen Minoren die Eigenschaft \mathcal{P} besitzen. Formal gilt für $H \preceq G$ also

$$\forall H' \cong H : G \in \mathcal{P} \Rightarrow H' \in \mathcal{P}.$$

Sei \mathcal{X} eine Menge oder Klasse von Digraphen, so ist durch

$$\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) := \{ G \mid \text{kein } X \in \mathcal{X} \text{ ist zu einem Minor von } G \text{ isomorph} \}$$

eine Grapheigenschaft \mathcal{G} beschrieben und die Graphen $X \in \mathcal{X}$ werden als die *verbotenen Minoren* von \mathcal{G} bezeichnet.

Außerdem lässt sich der Satz 2.1.2 auf Digraphen übertragen.

3.1.1 Satz:

Eine Digrapheigenschaft \mathcal{P} eines Digraphen ist genau dann erblich, wenn sie durch verbotene Minoren darstellbar ist.

Beweis:

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 2.1.2.

Sei zunächst \mathcal{P} eine durch verbotene Minoren darstellbare Digrapheigenschaft. Das heißt, es existiert eine Familie von Digraphen \mathcal{X} , so dass $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ gilt. Seien nun H und G Digraphen und H zu einem Minor von G isomorph mit $G \in \mathcal{P}$. Angenommen \mathcal{P} wäre nicht erblich und $H \notin \mathcal{P}$, dann existiert ein $X \in \mathcal{X}$, welches zu einem Minor H' von H isomorph ist. Aus der Transitivität von \preceq folgt mit $X \cong H' \preceq H \preceq G$ der Widerspruch zur Voraussetzung $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) = \mathcal{P}$. Somit ist \mathcal{P} erblich.

Sei umgekehrt \mathcal{P} eine erbliche Digrapheigenschaft und $\overline{\mathcal{P}}$ ihr Komplement (das heißt die Klasse aller Digraphen, welche nicht in \mathcal{P} liegen), so gilt direkt $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{P}})$ und ist somit durch verbotene Minoren darstellbar. \square

Es gilt sogar eine gerichtete Variante des Satzes 2.1.3, denn der Minorensatz wurde in [26] ursprünglich für Digraphen formuliert und die häufig wiedergegebene ungerichtete Variante in Satz 2.1.3 ist eine direkte Folgerung aus dem folgenden Satz 3.1.2.

3.1.2 Satz: (Minorensatz von Robertson und Seymour für Digraphen; vgl. 10.5 in [26])

Sei $(D_i)_{i=1,2,\dots}$ eine abzählbare Folge von Digraphen. Dann existieren Indizes $k > j \geq 1$, so dass G_j zu einem Minor von G_k isomorph ist.

Dies beschreibt eine Wohlquasiordnung auf der Menge der Digraphen.

Mit Satz 3.1.2 folgt eine gerichtete Variante von Korollar 2.1.5.

3.1.3 Korollar:

Jede erbliche Digrapheigenschaft \mathcal{P} lässt sich durch eine endliche Menge verbotener Minoren darstellen.

Beweis:

Nach Satz 3.1.1 existiert eine Menge \mathcal{X} verbotener Minoren, durch welche sich die Digrapheigenschaft \mathcal{P} darstellen lässt. Auf Grund der Transitivität von \preceq reichen die minimalen Elemente von

\mathcal{X} bezüglich \preccurlyeq . Das heißt, es existiert eine \preccurlyeq -minimale Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$ verbotener Minoren, durch die sich \mathcal{P} darstellen lässt. Dabei kann angenommen werden, dass \mathcal{F} keine paarweise isomorphen Elemente besitzt.

Angenommen \mathcal{F} wäre trotzdem unendlich, dann existiert eine unendliche abzählbare Folge $\mathcal{F} = (D_i)_{i=1, \dots}$ von Digraphen aus \mathcal{F} . Nach Satz 3.1.2 existieren Indizes $k > j \geq 1$, so dass G_j zu einem Minor von G_k isomorph ist. Dies steht allerdings im Widerspruch zur Annahme, dass \mathcal{F} eine \preccurlyeq -minimale Menge ohne paarweise isomorphe Elemente ist. Somit muss \mathcal{F} endlich sein. \square

Daher lässt sich die Charakterisierung von Digrapheigenschaften mit Hilfe der Minorenrelation für Digraphen genauso durchführen wie bei der Charakterisierung von Grapheigenschaften mit Hilfe der Minorenrelation für Graphen. Problematisch ist allerdings, dass bereits relativ einfache Digrapheigenschaften unter dieser Minorenrelation nicht erblich sind, wie folgender Satz am Beispiel der Digraphen ohne Zyklen der Länge ≥ 2 demonstriert. (Dies entspricht der Menge der azyklischen Digraphen bei Beschränkung auf schlichte Digraphen.)

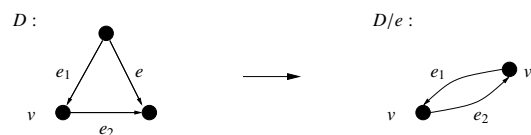
3.1.4 Satz:

Die Menge der Digraphen ohne Zyklen der Länge ≥ 2 ist unter der Minorenbildung nicht abgeschlossen.

Das heißt, die Digrapheigenschaft, dass ein Digraph keinen Zyklus der Länge ≥ 2 besitzt, ist nicht erblich.

Beweis:

Angenommen die Menge der Digraphen ohne Zyklus der Länge ≥ 2 sei unter der Minorenbildung abgeschlossen. Ein Gegenbeispiel für diese Annahme ist in Abbildung 3.2 dargestellt.



Abbildungung 3.2: Beispiel eines Digraphen D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 und D/e als Minor von D mit Zyklus der Länge 2

Somit ist die Digrapheigenschaft, dass ein Digraph keinen Zyklus der Länge ≥ 2 besitzt, nicht erblich. \square

Dies war wohl auch einer der Gründe, warum bisher kaum Ergebnisse zu Minoren von Digraphen veröffentlicht wurden. So konzentrierte sich der Fokus nachfolgender Veröffentlichungen vorwiegend auf die Verallgemeinerung der Baumzerlegungen und Baumweite zu einer gerichteten Variante. Einige der verschiedenen Ansätze dafür werden in den folgenden Kapiteln näher vorgestellt.

3.2 Hindernisse bei der Definition einer gerichteten Baumweite

Lange Zeit fehlte es an Ansätzen für die Formulierung einer gerichteten Version der Baumzerlegung und Baumweite. In diesem Kapitel werden die Hindernisse, welche bei der Übertragung der Begriffe auf Digraphen entstehen, dargestellt und einige Anforderungen an eine gerichtete Version ausgearbeitet. Eine der wohl grundlegendsten Forderung ist es, dass eine gerichtete Version der Baumweite eine Verallgemeinerung der Baumweite von Graphen darstellt.

Weil ein wechselseitig orientierter Digraph $D(G)$ die gleiche Adjazenzmatrix wie der Graph G besitzt, folgt in natürlicher Weise die Forderung, dass die Baumweite eines Graphen G mit der gerichteten Version der Baumweite des wechselseitig orientierten Digraphen $D(G)$ übereinstimmt.

Sei G ein Graph, dann gilt $\text{inv}(D(G)) = \text{tw}(G)$. (General)

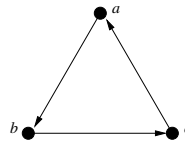
Dabei bezeichne hier $\text{inv}(D)$ den Wert der jeweiligen gerichteten Version der Baumweite für den Digraphen D . Diese Forderung wird in allen Arbeiten der nachfolgenden Ansätze aufgeführt (z.B. [15], [17], ...) und gilt somit als eine der wichtigsten Anforderungen an eine gerichtete Version der Baumweite.

Wie in [17] dargestellt, wurde zunächst versucht, die für Graphen bekannten Verfahren auf Digraphen zu übertragen. Dabei wurde in [17] zunächst ein Verfahren zur Konstruktion einer Baumzerlegung eines Graphen vorgestellt, welches das folgende Lemma ausnutzt.

3.2.1 Lemma: (vgl. Lemma 6 in [17])

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $X, Y \subseteq V$ und U eine Komponente von $G - X - Y$. Seien X_U diejenigen Knoten von X in der Komponente von $G - Y$, welche U enthält. Seien Y_U diejenigen Knoten von Y in der Komponente von $G - X$, welche U enthält. Dann ist U auch eine Komponente von $G - X_U - Y_U - (X \cap Y)$.

Problematisch ist dabei allerdings, dass Lemma 3.2.1 für Digraphen nicht mehr erfüllt ist, wenn in der Formulierung des Lemmas die Komponenten durch stark zusammenhängende Komponenten ersetzt werden. Dies wird deutlich, wenn das in [17] angegebene Gegenbeispiel untersucht wird, welches hier in Abbildung 3.3 dargestellt ist.



Abbildungung 3.3: Gegenbeispiel für Lemma 3.2.1 für Digraphen mit $U := \{a\}$, $X := \{b\}$, $Y := \{c\}$ und somit $X_U = Y_U = X \cap Y = \emptyset$

Eine weitere Forderung ergibt sich, wenn die azyklischen Digraphen betrachtet werden. Für Graphen ist bereits folgendes einfaches Lemma bekannt.

3.2.2 Lemma: (vgl. [8], S. 258)

Sei G ein schlichter Graph, so besitzt G genau dann eine Baumweite ≤ 1 , wenn G ein Baum ist.

Dieses Lemma lässt sich leicht auf allgemeinere Graphen erweitern.

3.2.3 Satz:

Sei G ein Graph, so besitzt G genau dann eine Baumweite ≤ 1 , wenn G keinen Zyklus der Länge ≥ 3 besitzt.

Beweis:

Eine Gewinnstrategie für die Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf G ignoriert die eventuell existierenden Schlingen und Mehrfachkanten. So ist das Problem auf den schlichten Graphen G' zurückführbar, wenn alle Schlingen und Mehrfachkanten aus G entfernt würden. Nach Lemma 3.2.2 folgt schließlich, dass G' und somit auch G genau dann eine Baumweite ≤ 1 besitzen, wenn G' ein Baum ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn G' und somit auch G keinen Zyklus der Länge ≥ 3 besitzen. □

In diesem Zusammenhang wird die natürliche Forderung gestellt, dass auch die gerichtete Version der Baumweite für azyklische Digraphen ≤ 1 sein sollte.

Sei D ein Digraph ohne Zyklen der Länge ≥ 2 , dann gilt $\text{inv}(D) \leq 1$. (Acyclic)

Des Weiteren sollte eine gerichtete Version der Baumweite lediglich von den stark zusammenhängenden Komponenten abhängen. Der Grund dafür liegt darin, dass für je zwei Knoten einer Komponente eines Graphen ein Pfad zwischen beiden Knoten existiert. Im gerichteten Fall ist dies nur für stark zusammenhängende Komponenten der Fall. Daher formulierten die Autoren von [15] zusätzlich die Forderung, dass eine gerichtete Version der Baumweite bei gerichteten Vereinigungen von Digraphen nur von den vereinigten Digraphen selbst abhängen soll.

Definition: (*gerichtete Vereinigung; vgl. [15]*)

Ein Digraph $D = (V, E, \mu)$ ist eine *gerichtete Vereinigung* zweier disjunkter Digraphen D_1 und D_2 , falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

- $V(D) = V(D_1) \dot{\cup} V(D_2)$
- D_1 und D_2 sind Untergraphen von D . (Daher gilt auch $E(D) \supseteq E(D_1) \dot{\cup} E(D_2)$.)
- Es existiert keine Kante $e \in E(D)$ mit $\mu(e) = (u, v)$, so dass $v \in V(D_1)$ und $u \in V(D_2)$ gilt.

Ist D eine gerichtete Vereinigung von D_1 und D_2 , so wird dies nachfolgend mit $D = D_1 \vec{\cup} D_2$ beschrieben.

Bemerkung:

Eigentlich bezeichnet $D_1 \vec{\cup} D_2$ die Klasse aller Graphen, welche als gerichtete Vereinigung von D_1 mit D_2 darstellbar sind. Daher bedeutet die Schreibweise „ $D = D_1 \vec{\cup} D_2$ “ (etwas irreführend), dass D dieser Klasse angehört.

Somit lautet die Forderung also formal wie folgt.

Sei $D = D_1 \vec{\cup} D_2$, dann gilt $\text{inv}(D) = \max \{ \text{inv}(D_1), \text{inv}(D_2) \}$. (Union)

Diesem Problem standen die Autoren von [15] gegenüber und formulierten zunächst folgende beiden Varianten einer gerichteten Version der Baumzerlegung und Baumweite, welche allerdings die Forderung **(Union)** nicht erfüllen.

Definition: (*1. Fehlversuch aus [15]*)

Sei D ein Digraph und (T, Z) eine Zerlegung von D . Dabei seien T ein Baum, $Z = (Z_t)_{t \in V(T)}$ eine Familie von Knotenmengen von D und es gelten folgende Bedingungen.

- i) $\bigcup_{t \in V(T)} Z_t = V(D)$
- ii) Seien $t, t', t'' \in V(T)$ und liege t' auf einem Pfad von t nach t'' , dann gelte $Z_t \cap Z_{t''} \subseteq Z_{t'}$.
- iii) Sei $e \in E(T)$, dann lassen sich die Komponenten von $T - e$ so als T_1 und T_2 nummerieren, dass keine Kante $(t', t'') \in E(D)$ mit $t'' \in (\bigcup_{t \in V(T_1)} Z_t) \setminus (\bigcup_{t \in V(T_2)} Z_t)$ und $t' \in (\bigcup_{t \in V(T_2)} Z_t) \setminus (\bigcup_{t \in V(T_1)} Z_t)$ existiert.

Die Weite dieser Zerlegung ist als $\max \{ |Z_t| - 1 \mid t \in T \}$ definiert.

Die entsprechende Invariante ist schließlich die minimale Weite einer solchen Zerlegung.

Definition: (2. Fehlversuch aus [15])

Sei D ein Digraph und (T, Z, π) eine Zerlegung von D . Dabei seien T ein Baum, $\pi = (\pi_t)_{t \in T}$, $Z = (Z_t)_{t \in V(T)}$ eine Familie von Knotenmengen von D und es gelten folgende Bedingungen.

- i) $\bigcup_{t \in V(T)} Z_t = V(D)$
- ii) Seien $t, t', t'' \in V(T)$ und liege t' auf einem Pfad von t nach t'' , dann gelte $Z_t \cap Z_{t''} \subseteq Z_{t'}$.
- iii) Für jedes $t_0 \in V(T)$ sei π_{t_0} eine lineare Ordnung auf den Komponenten von $T - t_0$. Aus T_1 streng vor T_2 unter π_{t_0} folge dabei stets, dass keine Kante $(t', t'') \in V(D)$ mit $t'' \in \bigcup_{t \in V(T_1)} (Z_t \setminus Z_{t_0})$ und $t' \in \bigcup_{t \in V(T_2)} (Z_t \setminus Z_{t_0})$ existiert.

Die Weite dieser Zerlegung ist als $\max \{ |Z_t| - 1 \mid t \in T \}$ definiert.

Die entsprechende Invariante ist schließlich die minimale Weite einer solchen Zerlegung.

Die Forderung (**Union**) liefert bei Erfüllung allerdings automatisch eine analoge Aussage zur Forderung (**Acyclic**), wie folgendes Lemma zeigt.

3.2.4 Lemma:

Sei D ein Digraph ohne Zyklen der Länge ≥ 2 und inv eine Invariante, für welche die Bedingung (**Union**) erfüllt ist. Dann folgt mit $\text{inv}(D) = \text{inv}(K_d^1)$ eine analoge Aussage zu (**Acyclic**).

Beweis:

Sei $n := V(D)$, dann setze $D_n := D$. Wegen Lemma 1.1.2 existiert mindestens ein initialer Knoten v_n in D_n . Somit ist D_n als gerichtete Vereinigung von $D_{n-1} \vec{\cup} D'_n$ mit $D_{n-1} := D_n - v_n$ und $D'_n := D_n[v_n]$ darstellbar.

Dabei gilt wegen $\text{inv}(D'_n) = \text{inv}(K_d^1)$ und (**Union**) die Beziehung

$$\text{inv}(D_n) := \max \{ \text{inv}(D_{n-1}), \text{inv}(D'_n) \} = \max \{ \text{inv}(D_{n-1}), \text{inv}(K_d^1) \}.$$

Weil D_{n-1} weiterhin keinen Zyklus der Länge ≥ 2 besitzt, lässt sich dieser Schritt bis D_1 mit $\text{inv}(D_1) = \text{inv}(K_d^1)$ wiederholen und es folgt die Behauptung mit

$$\text{inv}(D_n) := \max \{ \text{inv}(K_d^1), \dots, \text{inv}(K_d^1) \} = \text{inv}(K_d^1). \quad \square$$

Somit ist es ausreichend, die nachfolgenden gerichteten Versionen der Baumweite nur auf (**General**) und (**Union**) zu überprüfen.

3.3 Arboreale Weite $\text{dtw}(D)$

Thor Johnson, Neil Robertson, Paul D. Seymour und Robin Thomas führten 2001 in der Arbeit „Directed tree-width“ [15] die erste bekannte Form einer gerichteten Version der Baumzerlegungen und Baumweite für Digraphen ein.

Bemerkung:

Die erste bekannte Veröffentlichung war allerdings die Arbeit „Introducing Directed Tree Width“ [17] von Bruce Reed. Obwohl diese bereits 1999 erschien, bezieht sich der Autor darin bereits auf die Arbeit [15] in Form eines Manuskripts. Daher wird [15], ungeachtet der chronologischen

Reihenfolge der Veröffentlichungen, als die erste Arbeit auf dem Gebiet der gerichteten Version der Baumzerlegungen und Baumweite angesehen.

An dieser Stelle sei auch auf den Nachtrag [14] zur Arbeit [15] hingewiesen, welcher zwei wesentliche Korrekturen beinhaltet.

Der in [15] verfolgte Ansatz wird in diesem Kapitel vorgestellt. Dabei werden die wichtigsten Ergebnisse zusammengestellt und die Einhaltung der in Kapitel 3.2 gestellten Anforderungen überprüft.

Die Grundlage der so genannten *arborealen Zerlegung* bilden die so genannten *Arborescences*, welche eine gerichtete Version der Bäume darstellen. Diese fanden unter Anderem auch im Beweis des Minorensatzes für Digraphen (siehe Satz 3.1.2) in [25] Erwähnung.

Definition: (*Arborescence*; vgl. [15], [25])

Ein Digraph $D = (V, E, \mu)$ ist eine *Arborescence*, wenn D ein initialer Wurzeldigraph mit Wurzelknoten r_0 ist und der zugrundliegende Graph $U(D)$ ein Baum ist.

Das heißt unter Anderem, dass D schlicht ist und zu jedem Knoten $v \neq r_0$ ein eindeutiger Dipfad von r_0 nach v existiert.

Somit lässt sich eine *Arborescence* durch Orientierung der Kantenmenge eines Baumes gewinnen, in dem alle Kanten vom gewählten Wurzelknoten r_0 wegzeigen.

Für eine *Arborescence* R werden nachfolgende Schreibweisen benutzt. Für zwei Knoten $r, r' \in V(R)$ bezeichne $r' > r$, dass $r' \neq r$ gilt und in R ein gerichteter Pfad von r nach r' existiert. Sei $e \in E(R)$ mit Endknoten r , so bezeichne $r' > e$, falls entweder $r' = r$ oder $r' > r$ gilt. Dabei bezeichne $e \sim r$, dass e mit r inzidiert und somit r der Anfangs- oder Endknoten von e ist.

Definition: (*Z-normal*; vgl. [15])

Sei D ein Digraph und $Z \subseteq V(D)$. Eine Knotenmenge $S \subseteq V(D) \setminus Z$ heißt *Z-normal*, wenn jeder Dipfad in $D - Z$ mit Anfangs- und Endknoten in S auch vollständig in S verläuft und somit keinen Knoten aus $D - (Z \cup S)$ enthält.

Es ist bereits bekannt, dass die stark zusammenhängenden Komponenten des Untergraphen $D - Z$ eindeutig bestimmt sind. Nach Definition ist die *Z-normalen Menge* S eine Vereinigung von stark zusammenhängenden Komponenten aus $D - Z$.

Mit diesen Begriffen ist es nun möglich, die *arboreale Zerlegung* eines Digraphen zu formulieren.

Definition: (*arboreale Zerlegung, arboreale Weite*; vgl. [15])

Eine *arboreale Zerlegung* eines Digraphen D ist ein Tripel (R, X, W) . Dabei sind R eine *Arborescence* und $X = (X_e)_{e \in E(R)}$ und $W = (W_r)_{r \in V(R)}$ Familien von Knotenmengen von D mit folgenden Eigenschaften.

(A1) W ist eine Partition von $V(D)$.

(A2) Sei $e \in E(R)$, dann ist $\bigcup_{r > e} W_r$ eine X_e -normale Menge.

Sei (R, X, W) eine *arboreale Zerlegung* von D , so ist die *Weite* dieser *arborealen Zerlegung* definiert als

$$\max \{ |W_r \cup X_r| - 1 \mid r \in V(R) \} \quad \text{mit} \quad X_r := \bigcup_{e \sim r} X_e.$$

Die *arboreale Weite* $dtw(D)$ eines Digraphen D ist schließlich die minimale *Weite* einer *arborealen Zerlegung* von D .

In Abbildung 3.4 ist ein Beispiel für eine solche arboreale Zerlegung dargestellt. Dabei werden die Mengen aus W direkt neben den Knoten und die Mengen aus X direkt neben den Kanten notiert.

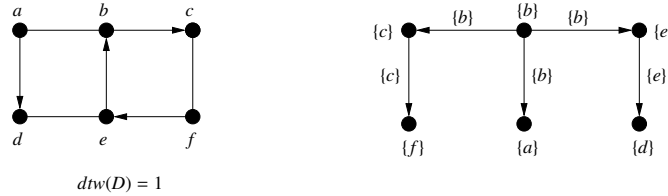


Abbildung 3.4: Beispiel für eine arboreale Zerlegung eines Digraphen D mit Weite 1

Bemerkung:

In der Arbeit [15] wurde der Begriff der „arborealen Weite“ mit „directed tree width“ bezeichnet. Allerdings würde diese Bezeichnung zur Überschneidung mit den Bezeichnungen in dem später vorgestellten Ansatz aus [17] führen. Daher wurde an dieser Stelle die Bezeichnung zu „arboreale Weite“ verändert, da sich dies im Zusammenhang mit den bereits verwendeten Begriffen „Arborescence“ und „arboreale Zerlegung“ anbot.

Nachfolgend werden die in Kapitel 3.2 aufgeführten Anforderungen an eine gerichtete Version der Baumzerlegung und Baumweite für die arborealen Zerlegungen und arboreale Weite überprüft.

3.3.1 Satz: (vgl. 2.1 in [15])

Die arboreale Weite erfüllt die Bedingung (**General**).

3.3.2 Satz:

Die arboreale Weite erfüllt die Bedingung (**Union**).

Beweis:

Angenommen der Digraph D ist eine gerichtete Vereinigung zweier disjunkter Digraphen D_1 und D_2 . Dann existiert eine arboreale Zerlegung (R_1, X_1, W_1) von D_1 mit Weite $dtw(D_1)$ und eine arboreale Zerlegung (R_2, X_2, W_2) von D_2 mit Weite $dtw(D_2)$.

O.B.d.A. seien R_1 und R_2 disjunkt und besitzen die jeweiligen Wurzelknoten r_1 bzw. r_2 .

Nachfolgend ist eine arboreale Zerlegung (R, X, W) von D definiert.

- $R = R_1 \vec{\cup} R_2$ mit $E(R) := (E(R_1) \cup E(R_2)) \dot{\cup} \{e_0\}$, wobei e_0 von r_1 nach r_2 führt
- $X = X_1 \cup X_2 \cup \{X_{e_0}\}$ mit $X_{e_0} := \emptyset$ (Es führt keine Kante von D_2 nach D_1 .)
- $W = W_1 \cup W_2$

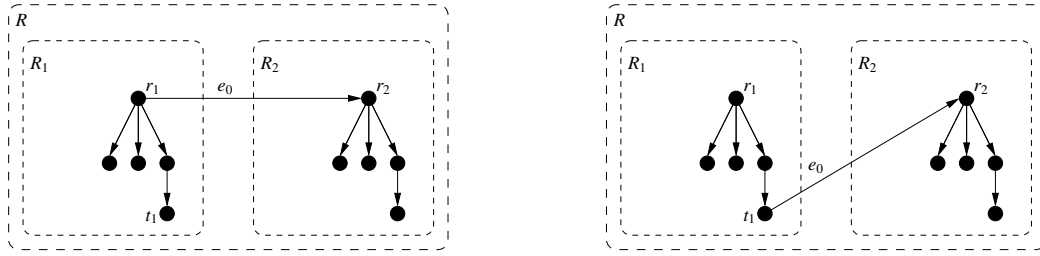
□

Nach Definition ist die Weite dieser Zerlegung gerade $\max\{dtw(D_1), dtw(D_2)\}$. Dies ist sogar eine arboreale Zerlegung minimaler Weite und somit die arboreale Weite von D .

Alternativ ist es auch möglich, jeden anderen Knoten $t_1 \in V(R_1)$ als Anfangsknoten der neuen Kante e_0 zu wählen. So kann zum Beispiel auch ein Blattknoten von R_1 für die Zusammenführung beider arborealer Zerlegungen gewählt werden.

Beide Konstruktionen sind in der Abbildung 3.5 schematisch dargestellt.

Nach Lemma 3.2.4 folgt aus der erfüllten Eigenschaft (**Union**) somit direkt eine analoge Aussage zur Bedingung (**Acyclic**). Für die arboreale Weite lautet diese nun wie folgt.

Abbildungung 3.5: Konstruktionsschemata für eine arboreale Zerlegung von $D_1 \dot{\cup} D_2$ nach Satz 3.3.2**3.3.3 Korollar:**

Die arboreale Weite eines Digraphen D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 beträgt $\text{dtw}(D) = 0$.

Beweis:

Mit Satz 3.3.2 ist Lemma 3.2.4 anwendbar und liefert

$$\text{dtw}(D) = \text{dtw}(K_d^1) = 0.$$

□

3.3.1 Arboreale Weite und Räuber-und-Gendarmen-Spiele

Die arborealen Zerlegungen und somit auch die arboreale Weite eines Digraphen stehen im Zusammenhang mit Gewinnstrategien für die Gendarmen in einer gerichteten Variante des Räuber-und-Gendarmen-Spiels auf Digraphen.

Die Zusammenhänge zwischen der Baumzerlegung und Baumweite eines Graphen und dem entsprechenden Räuber-und-Gendarmen-Spiel sind bereits aus Kapitel 2.5 bekannt und stellen ein nützliches Hilfsmittel dar. Auf der Menge der Digraphen ist das Räuber-und-Gendarmen-Spiel aus Kapitel 2.5 genauso spielbar, wenn dabei die Orientierung der Kanten vernachlässigt und somit nur der zugrundeliegende Graph betrachtet wird.

In diesem Kapitel wird eine gerichtete Variante des Räuber-und-Gendarmen-Spiels vorgestellt und dessen Gewinnstrategien in Verbindung zur arborealen Zerlegung und arborealen Weite gebracht.

Definition: (Spielvariante I , $cn_1(D)$; vgl. [15])

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph. Dann ist das (gerichtete) Räuber-und-Gendarmen-Spiel (Spielvariante I) mit k Gendarmen wie folgt definiert.

- Die Gendarmen wählen ein $X_0 \in [V]^{\leq k}$ und der Räuber wählt einen Knoten $r_0 \in V - X_0$. Dies bezeichnet die Position (X_0, r_0) .
- Sei (X_i, r_i) die aktuelle Position und $r_i \notin X_i$. Dann wählen die Gendarmen ein $X_{i+1} \in [V]^{\leq k}$ und der Räuber einen Knoten r_{i+1} so, dass je ein Dipfad von r_i nach r_{i+1} und zurück existiert, der keinen Knoten aus $X_i \cap X_{i+1}$ enthält.
- Sei (X_i, r_i) die aktuelle Position und $r_i \in X_i$. Dann haben die Gendarmen den Räuber gefangen und somit gewonnen.

Dabei ist den Gendarmen zu jeder Zeit die aktuelle Position des Räubers bekannt. Das heißt, der Räuber ist für die Gendarmen sichtbar.

Die Gendarmenzahl von D wird bei dieser Spielvariante mit $cn_1(D)$ bezeichnet.

Bei dieser Spielvariante fällt vor allem die Zugbedingung des Räubers auf, denn von r_i nach r_{i+1} und zurück muss in $D - (X_i \cap X_{i+1})$ je ein Dipfad existieren. Der Räuber ist demzufolge immer auf die stark zusammenhängende Komponente von $D - (X_i \cap X_{i+1})$ beschränkt, in welcher r_i enthalten ist.

Für Graphen ist diese Rückwegbedingung automatisch erfüllt. Somit ist ein nachvollziehbarer Schritt, die Bewegung des Räubers auf diese Weise einzuschränken.

Bemerkung:

Die im Kapitel 2.5 vorgestellten Begriffe im Zusammenhang mit Räuber-und-Gendarmen-Spielen wurden bereits sehr allgemein formuliert und lassen sich daher in natürlicher Weise auch für die obige Formulierung des gerichteten Räuber-und-Gendarmen-Spiels verwenden. Aus diesem Grunde wird an dieser Stelle, mit Ausnahme der Havens, davon abgesehen, all diese Begriffe für den gerichteten Fall erneut zu definieren.

Nachfolgender Satz 3.3.4 stellt zunächst den Zusammenhang zwischen einer arborealen Zerlegung und einer Gewinnstrategie der Gendarmen im gerichteten Räuber-und-Gendarmen-Spiel her.

3.3.4 Satz: (vgl. Ausführungen in [15])

Sei D ein Digraph mit einer arborealen Weite $< k$, dann besitzen k Gendarmen eine Gewinnstrategie.

Beweis:

Die Konstruktion einer Gewinnstrategie aus arborealen Zerlegung wird an dieser Stelle im Detail dargestellt, weil die arboreale Zerlegung mit einer solchen Gewinnstrategie sehr intuitiv überprüfbar ist.

Seien (R, X, W) eine arboreale Zerlegung von D mit Weite $< k$, $r_0 \in V(R)$ der initiale Wurzelknoten der Arborecence R und $\pi = (P_0, v_0), (P_1, v_1), \dots$ eine Partie des gerichteten Räuber-und-Gendarmen-Spiels auf D .

Weil die Weite der arborealen Zerlegung $< k$ ist, folgt für alle $r \in V(R)$ daher $|W_r \cup X_r| \leq k$ mit $X_r := \bigcup_{e \sim r} X_e$.

Die Gewinnstrategie τ für k Gendarmen lässt sich anschaulich wie folgt beschreiben. (vgl. Ausführungen in [15])

- Zu Beginn besetzen die Gendarmen die Knoten $P_0 := W_{r_0} \cup X_{r_0}$ mit $X_{r_0} := \bigcup_{e \sim r_0} X_e$. (Das heißt: $\tau(\emptyset) := P_0$)
- Der Räuber wählt eine beliebige stark zusammenhängende Komponente C_0 aus $D - P_0$ und einen beliebigen Knoten $v_0 \in V(C_0)$.
- Wegen (A2) existiert nun eine Kante $e_1 \in E(R)$ von $r_0 \in V(R)$ nach $r_1 \in V(R)$ so, dass $V(C_0) \subseteq W_{e_1} := \bigcup_{r > e_1} W_r$ gilt.

Dabei ist es dem Räuber durch die Gendarmen bei X_{e_1} nicht mehr möglich, W_{e_1} zu verlassen.

- Im nächsten Zug wählen die Gendarmen $P_1 := W_{r_1} \cup X_{r_1}$. Wegen $X_{e_1} \subseteq P_0 \cap P_1$ ist der Räuber weiterhin auf W_{e_1} beschränkt. (Das heißt: $\tau((P_0, v_0)) := P_1$)

- Nun wählt der Räuber eine Position v_1 in der stark zusammenhängenden Komponente von $D - (P_0 \cap P_1)$, in welcher v_0 enthalten ist.
- Am Ende des Zuges lautet somit die aktuelle Position (P_1, v_1) . Liegt v_1 bereits in P_1 , so haben die Gendarmen gewonnen. Ansonsten liegt v_1 in einer stark zusammenhängenden Komponente C_1 von $D - P_1$ und der neue Zug wird analog ausgeführt.

Wird die Partie π auf diese Weise gespielt, so bilden die Züge der Gendarmen r_0, r_1, \dots einen Dipfad in R . Auf Grund der Endlichkeit von D und somit auch von R ist dieser Dipfad endlich und für die letzte Position (P_n, v_n) gilt dabei immer die Gewinnbedingung $v_n \in P_n$.

Daher ist die so beschriebene Strategie τ sogar eine Gewinnstrategie für k Gendarmen. \square

Allerdings sind die so erhaltenen Gewinnstrategien nicht immer Gendarmen-monoton. Das heißt, dass es unter Umständen nötig ist, Knoten später erneut zu besetzen, obwohl sie zu einem früheren Zeitpunkt der Partie bereits von den Gendarmen besetzt wurden. In Abbildung 3.6 sei an dieser Stelle das Gegenbeispiel zur Gendarmen-Monotonie aufgeführt, welches bereits aus [15] bekannt ist.

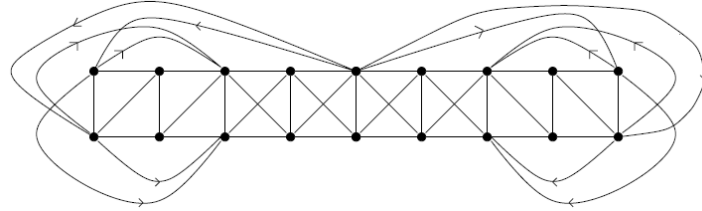


Abbildung 3.6: Beispiel eines Digraphen D mit $dtw(D) = 3$, aber ohne Gendarmen-monotone Gewinnstrategie für 4 Gendarmen (aus [15])

Im Gegensatz dazu ist die konstruierte Gewinnstrategie tatsächlich Räuber-monoton.

Zunächst wurde lange Zeit vermutet, dass analog zu Satz 2.5.2 die Existenz einer Gewinnstrategie für k Gendarmen automatisch auch die Existenz einer Räuber-monotonen Gewinnstrategie für k Gendarmen impliziert. Allerdings wurde diese Vermutung 2007 von Isolde Adler in ihrer Arbeit [1] durch Angabe eines Gegenbeispiels beantwortet.

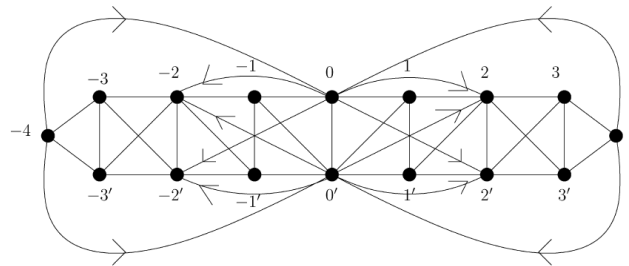


Abbildung 3.7: der Digraph D^1 von Proposition 3.3.5 ohne Räuber-monotone Gewinnstrategie für 5 Gendarmen, aber mit Gewinnstrategie für 4 Gendarmen (aus [1])

3.3.5 Proposition: (vgl. Theorem 8 in [1])

Es existiert ein Digraph D^1 (siehe Abbildung 3.7) so, dass 4 Gendarmen zwar eine Gewinnstrategie besitzen, aber keine Räuber-monotone Gewinnstrategie existiert.

Analog zu den Havens von Graphen lässt sich dieser Begriff auch für Digraphen formulieren.

Definition: (*Haven in Digraphen; vgl. [15]*)

Sei D ein Digraph und $w \in \mathbb{N}_0$. Ein *Haven* der Ordnung w in D ist eine Abbildung β , welche jedem $Z \subseteq V(D)$ mit $|Z| < w$ die Knotenmenge einer stark zusammenhängenden Komponente aus $D - Z$ so zuordnet, dass die nachfolgende Bedingung erfüllt ist.

$$\text{Sei } Z' \subseteq Z \subseteq V(D) \text{ mit } |Z| < w, \text{ dann folgt } \beta(Z) \subseteq \beta(Z'). \quad (\textbf{Haven2})$$

In der Arbeit [15] wurde weiterhin vermutet, dass sich das Korollar 2.5.3 auch auf Digraphen übertragen lässt. Ein Teil dieser Vermutung konnte dabei bereits bewiesen werden und ist hier nochmals in Lemma 3.3.6 angeführt.

3.3.6 Lemma: (*vgl. 3.1 in [15]*)

Sei D ein Digraph und $k \in \mathbb{N}$.

Wenn D einen Haven der Ordnung w besitzt, dann ist die *arboreale Weite* von D mindestens $k - 1$.

In [1] wurde allerdings die Umkehrung dieses Lemmas durch ein Gegenbeispiel widerlegt.

3.3.7 Proposition: (*vgl. Theorem 10 in [1]*)

Es existiert ein Digraph D^2 (siehe Abbildung 3.8) mit *arborealer Weite* $\text{dtw}(D^2) \geq 4$, aber D^2 besitzt keinen Haven der Ordnung 5.

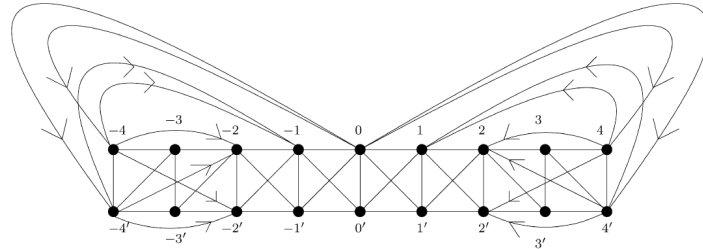


Abbildung 3.8: der Digraph D^2 von Proposition 3.3.7 mit $\text{dtw}(D^2) \geq 4$ und ohne Haven der Ordnung 5 (aus [1])

3.3.2 Resultate und Anwendungen

In Kapitel 2.6 wurden bereits einige ausgewählte mächtige Erkenntnisse für Graphen vorgestellt. Für Digraphen sind leider bisher noch relativ wenig Resultate bekannt. Allerdings ähneln diese den Anfängen in der Minorentheorie von Graphen (siehe z.B. [21]), so dass eine Motivation für weitere Untersuchungen besteht. Nachfolgend werden die wichtigsten Erkenntnisse im Zusammenhang mit der *arborealen Weite* von Digraphen zusammengetragen. Für Details zu den vorgestellten Resultaten sei auf die jeweilige Quelle verwiesen, da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

3.3.8 Satz: (*vgl. Ausführungen zu 3.3 in [15]*)

Sei D ein Digraph und $w \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann existiert ein Algorithmus, welcher mit *polynomiellen Zeitaufwand* einen Haven der Ordnung w erzeugt oder eine *arboreale Zerlegung* der Weite $\leq 3w - 2$ (mit einer *Arborescence* mit maximal $|V(D)|$ Knoten) findet.

Definition: (Verbindung, σ -Verbindung; vgl. [15])

Eine *Verbindung* in einem Digraph D ist ein Teilgraph L von D , so dass jede schwache Komponente von L ein einzelner Dipfad ist.

Sei $\sigma = (s_1, t_1, \dots, s_k, t_k)$ eine Folge von $2k$ (nicht notwendigerweise verschiedener) Knoten aus D . Eine Verbindung L ist eine σ -Verbindung, falls die schwachen Komponenten von L so zu P_1, \dots, P_k nummeriert werden können, dass für alle $i = 1, \dots, k$ somit P_i ein einzelner Dipfad von s_i nach t_i ist.

3.3.9 Satz: (vgl. 4.8 in [15])

Seien $k, w \in \mathbb{N}_0$ fest gewählt, dann existiert ein Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, um das folgende Problem zu lösen.

Eingabe: Ein Digraph D mit n Knoten, eine arboreale Zerlegung (R, X, W) von D mit einer Weite von $\leq w - 1$, einer Folge σ von $2k$ Knoten aus D und einer Menge $M \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Frage: Existiert eine σ -Verbindung L in D mit $|V(L)| \in M$?

Zu den Problemen, welche auf dem Problem in Satz 3.3.9 basieren, zählen unter Anderem folgende Fragen nach der Existenz:

- einer Verbindung für eine feste Anzahl von Enden
- eines Hamiltonpfades
- eines Hamiltonpfades mit vorgegebenen Endknoten
- eines Hamiltonkreises
- eines geraden Zyklus durch einen vorgegebenen Knoten.

3.4 Gerichtete Baumweite $dtw_R(D)$

Bruce Reed stellte in seiner Arbeit [17] eine neue gerichtete Variante der Baumzerlegung und Baumweite vor. Nach Angabe des Autors handelt es sich bei der gerichteten Baumzerlegung um eine abgewandelte Notation der in [15] vorgestellten arborealen Zerlegung und arborealen Weite. Bei dieser Notation werden allerdings die Knotenmengen der Partition und die separierenden Knotenmengen strikt getrennt und die Definition der gerichteten Baumweite wird nur in Abhängigkeit zu den separierenden Knotenmengen formuliert.

Definition: (gerichtete Baumzerlegung, gerichtete Baumweite $dtw_R(D)$; vgl. [17])

Eine *gerichtete Baumzerlegung* eines Digraphen D ist ein Tripel (T, W, X) . Dabei sind T eine Arborrescence und $X = (X_e)_{e \in E(T)}$ und $W = (W_r : r \text{ ist Blatt in } T)$ Familien von Knotenmengen von D mit folgenden Eigenschaften.

(B1) W ist eine Partition von $V(D)$ in einelementige Knotenmengen.

(B2) Sei $e \in E(T)$, dann ist $W_e := \bigcup \{ W_r \mid r \text{ ist Blatt in } T \text{ mit } r > e \}$ eine X_e -normale Menge.

Die Weite einer solchen gerichteten Baumzerlegung (T, W, X) ist dann definiert als

$$\max \{ |X_t| \mid t \in V(T) \} \quad \text{mit} \quad X_t := \bigcup_{e \sim t} X_e.$$

Die *gerichtete Baumweite* $dtw_R(D)$ eines Digraphen D ist schließlich die minimale Weite einer gerichteten Baumzerlegung von D .

Bemerkung:

Die hier angeführte Definition weicht von der originalen Notation in [17] an zwei Stellen ab. Diese Abweichungen sind allerdings nur notationsbedingt und äquivalent zur originalen Fassung, wie nachfolgend deutlich wird.

- Ursprünglich wurde die gerichtete Baumweite vom Autor für einen Baum mit einem extra ausgezeichneten Wurzelknoten formuliert. Allerdings wurden dabei die Notationen für Knotenbeziehungen von der davor definierten Arborescence verwendet. Daher ist anzunehmen, dass beabsichtigt war, den Baum mit Wurzelknoten durch eine Arborescence zu ersetzen. Da dies ohne Einschränkung möglich ist, wurde dieser Austausch in obiger Formulierung durchgeführt.
- In der ursprünglichen Fassung ist die Formulierung der gerichteten Baumweite nicht direkt mittels X_e -normaler Mengen beschrieben.

Die Mengen X_e sollten die Knoten in W_e von den restlichen Knoten des Digraphen in der Art, dass in $D - X_e$ kein Dipfad mehr existiert, welcher Anfangs- und Endknoten in W_e besitzt und nicht vollständig in W_e enthalten ist.

Dies entspricht allerdings der Definition, dass W_e eine X_e -normale Menge ist. Aus diesem Grund wurde die Definition mittels X_e -normaler Mengen formuliert, um die Nähe zur arborealen Zerlegung zu verdeutlichen.

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels angedeutet, handelt es sich nach Angabe des Autors hierbei um eine abgewandelte Notation der arborealen Zerlegung, wobei die gerichtete Baumweite um maximal 1 von der arborealen Weite abweicht.

Bei näherer Studie stellt sich diese Behauptung allerdings als falsch heraus, wie nachfolgende Proposition 3.4.1 zeigt.

3.4.1 Proposition:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Digraph D_n mit arborealer Weite ≤ 1 und gerichteter Baumweite $\geq n$.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$, so lässt sich ein solcher Digraph D_n wie folgt konstruieren.

Zunächst sei G_n ein schlichter Graph mit der Knotenmenge $V(G_n) := \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ und der Kantenmenge $E(G_n) := \{\{v_0, v_i\} \mid i = 1, \dots, n\}$, sowie D_n der wechselseitig orientierte Digraph $D(G_n)$. Mit den Sätzen 3.2.3 und 3.3.1 gilt dabei $dtw(D_n) = tw(G_n) \leq 1$.

Sei nun (T, W, X) eine beliebige gerichtete Baumzerlegung von D , dann existiert wegen **(B1)** in T ein Blattknoten $t \in V(T)$ mit $W_t = \{v_0\}$. Da t ein Blattknoten von T ist und T genau $n + 1$ Blattknoten besitzt, kann t nicht gleichzeitig auch Wurzelknoten sein. Somit existiert in T eine Kante $e \in E(T)$ mit t als Endknoten.

Mit Bedingung **(B2)** muss nun aber $X_e := \{v_1, \dots, v_n\}$ und somit $|X_e| = n$ gelten. Damit ist die Weite jeder gerichteten Baumzerlegung von D_n und somit auch die Baumweite $\geq n$. \square

In Abbildung 3.9 ist der Digraph D_3 mit einer arborealen Zerlegung ≤ 1 und einer schematischen Darstellung einer beliebigen gerichteten Baumzerlegung dargestellt. Demzufolge ist D_3 nicht nur ein Gegenbeispiel für die Annahme aus [17], dass die gerichtete Baumweite nur maximal um 1 von der arborealen Weite abweicht, sondern auch ein Gegenbeispiel zur Forderung **(General)**.

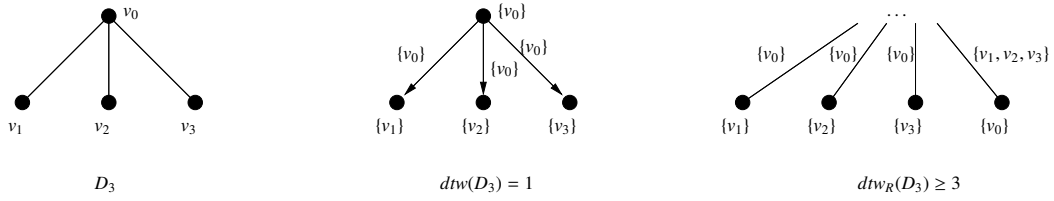


Abbildung 3.9: der Digraph D_3 gemäß der Konstruktion nach Proposition 3.4.1 mit $n = 3$ als Gegenbeispiel zur Annahme aus [17] und für **(General)**

3.4.2 Satz:

Die gerichtete Baumweite erfüllt die Bedingung **(General)** nicht.

Beweis:

Wähle $n > 1$ im Beweis von Proposition 3.4.1. Die dort beschriebene Konstruktion erzeugt einen Graphen G mit

$$tw(G_n) = 1 < n \leq dtw_R(D(G_n))$$

und damit ein Gegenbeispiel, für welches **(General)** nicht erfüllt ist. \square

Nichtsdestotrotz lassen sich die Forderungen **(Union)** und **(Acyclic)** für die gerichtete Baumweite beweisen.

3.4.3 Satz:

Die gerichtete Baumweite erfüllt die Bedingung **(Union)**.

Beweis:

Angenommen der Digraph D ist eine gerichtete Vereinigung zweier disjunkter Digraphen D_1 und D_2 . Dann existiert eine gerichtete Baumzerlegung (T_1, W_1, X_1) von D_1 mit Weite $dtw_R(D_1)$ und eine gerichtete Baumzerlegung (T_2, W_2, X_2) von D_2 mit Weite $dtw_R(D_2)$.

O.B.d.A. seien T_1 und T_2 disjunkt und besitzen die jeweiligen Wurzelknoten r_1 bzw. r_2 .

Nachfolgend ist eine gerichtete Baumzerlegung (T, W, X) von D definiert.

- $V(T) := (V(T_1) \cup V(T_2)) \dot{\cup} \{r_0\}$
- $E(T) := (E(T_1) \cup E(T_2)) \dot{\cup} \{e_1, e_2\}$ mit $e_1 = (r_0, r_1)$ und $e_2 = (r_0, r_2)$
- $X := X_1 \cup X_2 \cup \{X_{e_1}, X_{e_2}\}$ mit $X_{e_1} = X_{e_2} := \emptyset$ (Es führt keine Kante von D_2 nach D_1 .)
- $W = W_1 \cup W_2$ \square

Nach Definition ist die Weite dieser Zerlegung gerade $\max\{dtw_R(D_1), dtw_R(D_2)\}$. Dies ist sogar eine gerichtete Baumzerlegung minimaler Weite und somit die gerichtete Baumweite von D . In Abbildung 3.10 ist diese Konstruktion dargestellt.

Nach Lemma 3.2.4 folgt aus der erfüllten Eigenschaft **(Union)** somit direkt eine analoge Aussage zur Bedingung **(Acyclic)**. Für die gerichtete Baumweite lautet diese nun wie folgt.

3.4.4 Korollar:

Die gerichtete Baumweite eines Digraphen D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 beträgt $dtw_R(D) = 0$.

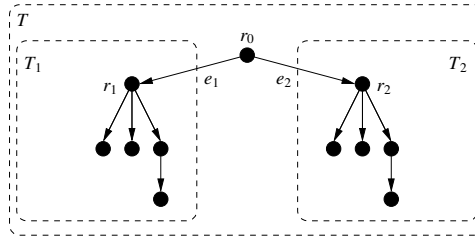


Abbildung 3.10: Konstruktionsschema einer gerichteten Baumzerlegung für die gerichtete Vereinigung $D_1 \vec{\cup} D_2$ nach Satz 3.4.3.

Beweis:

Mit Korollar 3.4.3 ist Lemma 3.2.4 anwendbar und liefert

$$dtw_R(D) = dtw_R(K_d^1) = 0 .$$

□

Die gerichtete Baumweite hat sich allerdings nicht durchgesetzt. Einer der Gründe dafür könnte die ungewöhnliche Notation der gerichteten Baumzerlegungen in [17] sein, welche sich in dieser Form nur schwer mit der Notation der arborealen Zerlegung vergleichen lässt. Der Autor gibt dabei zwar Hinweise, wie die gerichtete Baumweite mit der arborealen Weite in Verbindung gesetzt werden kann, aber bleibt einen konkreten Beweis schuldig. In Proposition 3.4.1 konnte in dieser Arbeit ein einfaches Gegenbeispiel für diese Behauptung gefunden werden, dass die gerichtete Baumweite immer nur um maximal 1 von der arborealen Weite abweicht. Dadurch wird deutlich, dass die gerichtete Baumweite nach [17] als Verallgemeinerung der Baumweite auf Digraphen eher ungeeignet ist.

Aus diesem Grund wird die gerichtete Baumweite in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

3.5 D-Weite $dw(D)$

In [27] ging 2005 Mohammad Ali Safari einen neuen Weg mit der Definition von D-Zerlegungen und der D-Weite.

Definition: (*D-Zerlegung, D-Weite; vgl. [27]*)

Eine D-Zerlegung eines Digraphen D ist ein geordnetes Paar (T, X) . Dabei sind T ein Baum und $X = (X_t)_{t \in V(T)}$ eine Familie von Knotenmengen von D mit folgenden Eigenschaften.

(C1) $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V(D)$

(C2) Für jede stark zusammenhängende Knotenmenge $S \subseteq V(D)$ lassen sich die beiden Mengen $V_S := \{ t \in V(T) \mid S \cap X_t \neq \emptyset \}$ und $E_S := \{ e = (t_1, t_2) \in E(T) \mid S \cap X_{t_1} \cap X_{t_2} \neq \emptyset \}$ bilden, so dass (V_S, E_S) ein zusammenhängender Teilbaum von T ist.

Sei (T, X) eine D-Zerlegung von D , so ist die Weite dieser D-Zerlegung definiert als

$$\max \{ |X_t| - 1 \mid t \in V(T) \} .$$

Die *D-Weite* $dw(D)$ eines Digraphen D ist schließlich die minimale Weite einer D-Zerlegung von D .

Wird in **(C2)** die Bedingung für S von stark zusammenhängend zu schwach zusammenhängend gelockert, so folgt die Formulierung der Baumzerlegung für den zugrundeliegenden Graphen in Form der Bedingungen **(T1)**, **(T2)** und **(T3')**.

In Abbildung 3.11 ist ein Beispiel für eine solche D-Zerlegung dargestellt.

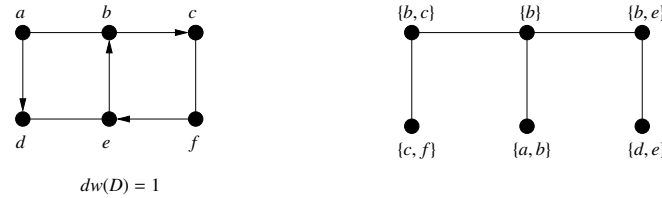


Abbildung 3.11: Beispiel für eine D-Zerlegung eines Digraphen D mit Weite 1

Der Autor bewies dabei bereits die Forderung **(General)**.

3.5.1 Satz: (vgl. Korollar 2 in [27])

Die D-Weite erfüllt die Bedingung **(General)**.

3.5.2 Satz:

Die D-Weite erfüllt die Bedingung **(Union)**.

Beweis:

Angenommen der Digraph D ist eine gerichtete Vereinigung zweier disjunkter Digraphen D_1 und D_2 . Dann existiert eine D-Zerlegung (T_1, X_1) von D_1 mit Weite $dw(D_1)$ und eine D-Zerlegung (T_2, X_2) von D_2 mit Weite $dw(D_2)$. Dabei bleiben alle stark zusammenhängenden Knotenmengen aus D_1 und D_2 auch nach der gerichteten Vereinigung erhalten und sind die einzigen stark zusammenhängenden Knotenmengen in D .

O.B.d.A. seien T_1 und T_2 disjunkt mit $t_1 \in V(T_1)$ und $t_2 \in V(T_2)$.

Nachfolgend ist eine D-Zerlegung (T, X) von D definiert.

- $V(T) := V(T_1) \cup V(T_2)$
- $E(T) := (E(T_1) \cup E(T_2)) \dot{\cup} \{e_0\}$ mit $e_0 := \{t_1, t_2\}$
- $X := X_1 \cup X_2$

□

Nach Definition ist die Weite dieser Zerlegung gerade $\max \{ dw(D_1), dw(D_2) \}$. Dies ist sogar eine D-Zerlegung minimaler Weite und somit die D-Weite von D . Die Konstruktion ist in Abbildung 3.12 dargestellt.

Nach Lemma 3.2.4 folgt aus der erfüllten Eigenschaft **(Union)** somit direkt eine analoge Aussage zur Bedingung **(Acyclic)**. Für die D-Weite lautet diese nun wie folgt.

3.5.3 Korollar:

Die D-Weite eines Digraphen D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 beträgt $dw(D) = 0$.

Beweis:

Mit Satz 3.5.2 ist Lemma 3.2.4 anwendbar und liefert

$$dw(D) = dw(K_d^1) = 0.$$

□

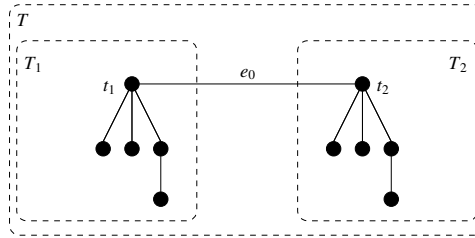


Abbildung 3.12: Konstruktionsschema einer D-Zerlegung für die gerichtete Vereinigung $D_1 \vec{\cup} D_2$ nach Satz 3.5.2.

Offenbar besitzt die D-Weite einen ebenso einschränkenden Charakter wie die arboreale Weite, wie folgendes Lemma bestätigt.

3.5.4 Lemma: (vgl. Korollar 1 in [27])
 Sei D ein Digraph, dann gilt $dtw(D) \leq dw(D)$.

Sei \mathcal{K} eine Klasse von Digraphen und $k \in \mathbb{N}_0$ eine obere Schranke für die D-Weite dieser Klasse. Das heißt, für alle $D \in \mathcal{K}$ gilt $dw(D) \leq k$. Wegen Lemma 3.5.4 folgt, dass k auch eine obere Schranke für die arboreale Weite der Klasse \mathcal{K} ist. So sind alle Resultate für Klassen mit beschränkter arborealer Weite auch für alle Klassen mit beschränkter D-Weite gültig. Leider sind die algorithmischen Möglichkeiten einer beschränkten D-Weite bisher kaum untersucht.

3.6 DAG-Weite $dgw(D)$

Bei den bisherigen Zerlegungen wurde stets darauf geachtet, dass in eine baumartige Struktur zerlegt wird. Allerdings ist es auch möglich, Digraphen in allgemeinere gerichtete Strukturen zu zerlegen. Dabei sind die azyklischen Digraphen von besonderem Interesse. Viele Algorithmen, die Probleme auf der Grundlage von Digraphen lösen, können stark vereinfacht werden, wenn der Digraph als azyklisch vorausgesetzt werden kann.

Dies motiviert die Definition einer DAG-Zerlegung und DAG-Weite, welche die Ähnlichkeit eines Digraphen zu einem DAG im Groben widerspiegelt. Im Jahr 2006 veröffentlichten zwei Arbeitsgruppen in den Arbeiten [16] und [5] unabhängig voneinander sehr ähnliche Definitionen der DAG-Weite. Beide Arbeitsgruppen reichten 2009 eine gemeinsame Arbeit [6] ein, welche die Ergebnisse zusammenführte und mit entsprechenden Anwendungen in Verbindung setzte. Bisher wurde [6] allerdings noch nicht veröffentlicht.

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeiten zusammengefasst dargestellt. Dabei steht die Formulierung der DAG-Weite in direktem Zusammenhang mit einer gerichteten Variante des Räuber-und-Gendarmen-Spiels. In diesem Sinne wurden einige Bezeichnungen von den Räuber-und-Gendarmen-Spielen zur Beschreibung der DAG-Weite wieder aufgegriffen.

Definition: (bewachen; vgl. [5],[6])

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph. Eine Menge $W \subseteq V$ bewacht eine Menge $V' \subseteq V$, wenn für jede Kante $e \in E$ mit $\mu(e) = (u, v)$, $u \in V'$ und $v \notin V'$ stets $v \in W$ folgt.

Das heißt, W bewacht V' wenn V' in $G - W$ eine Vereinigung schwacher Komponenten ist.

Bemerkung:

Die gerichteten Kanten eines schlichten DAGs D erzeugen eine Halbordnung \leq auf der Knotenmenge $V(D)$. Dabei gilt für zwei Knoten $d, d' \in V(D)$ die Beziehung $d \leq d'$ genau dann, wenn $d = d'$ gilt oder in D ein Dipfad von d nach d' existiert. Diese Halbordnung entspricht also dem reflexiven transitiven Abschluss der Adjazenzrelation $E(D)$.

Im Nachfolgenden wird an entsprechender Stelle die Notation in Form der Halbordnung bevorzugt.

Definition: (DAG-Zerlegung, DAG-Weite $dgw(G)$; vgl. [16], [5], [6])

Eine DAG-Zerlegung eines Digraphen G ist ein geordnetes Paar (D, X) . Dabei sind D ein schlichter DAG und $X = (X_d)_{d \in V(D)}$ eine Familie von Knotenmengen von G , für die folgendes gilt.

- (D1) $\bigcup_{d \in V(D)} X_d = V(G)$ (Dabei ist $X_d = \emptyset$ zulässig.)
- (D2) Sei $(d, d') \in E(D)$ (das heißt $d' > d$), dann bewacht $X_d \cap X_{d'}$ die Knotenmenge $X_{\geq d'} \setminus X_d$ mit $X_{\geq d'} := \bigcup_{d'' \geq d'} X_{d''}$.

Für einen initialen Knoten $d \in V(D)$ wird $X_{\geq d}$ von der leeren Menge bewacht.

- (D3) Seien $d_1, d_2, d_3 \in V(D)$ mit $d_1 \leq d_2 \leq d_3$, dann gilt $X_{d_1} \cap X_{d_3} \subseteq X_{d_2}$.

Sei (D, X) eine DAG-Zerlegung von D , so ist die Weite dieser DAG-Zerlegung definiert als

$$\max \{ |X_d| - 1 \mid d \in V(D) \}.$$

Die DAG-Weite $dgw(D)$ eines Digraphen D ist schließlich die minimale Weite einer DAG-Zerlegung von D .

In Abbildung 3.13 ist eine solche DAG-Zerlegung dargestellt.

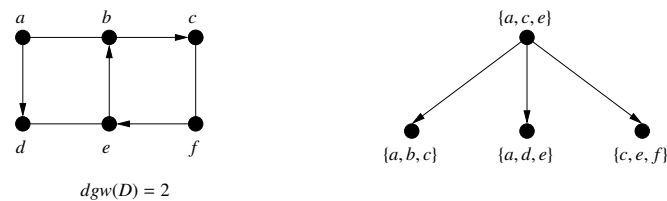


Abbildung 3.13: Beispiel für eine DAG-Zerlegung eines Digraphen D mit Weite 2

Bemerkung:

In den angegebenen Arbeiten wurde die DAG-Zerlegung in äquivalenter Form formuliert. Bei der Formulierung der Weite einer DAG-Zerlegung gibt es in den Arbeiten [5] und [6] eine Abweichung um genau 1, da diese dort in Form von $\max \{ |X_d| \mid d \in V(D) \}$ definiert wurde. Dies hat allerdings zur Folge, dass die Forderung (**General**) nicht mehr erfüllt ist.

Aus diesem Grund wurde die Definition der Weite einer DAG-Zerlegung aus [16] entnommen. Die Ergebnisse aus den Arbeiten [5] und [6], welche im weiteren Verlauf vorgestellt werden, wurden an die hier verwendete Notation der DAG-Weite entsprechend angepasst.

Die DAG-Zerlegung wird aber vor allem durch die Einführung einer Normalform für eine algorithmische Verwendung nutzbar. In [16] wurde bereits eine solche Normalform formuliert. In [5] wurde ein ähnlicher Ansatz formuliert und in [6] ausführlich behandelt. Nachfolgend wird die Normalform aus [5] und [6] vorgestellt.

Definition: (Normalform; vgl. [5], [6])

Eine DAG-Zerlegung (D, X) liegt in Normalform vor, falls sie folgende Bedingungen erfüllt.

- (N1) Der DAG D besitzt einen eindeutigen initialen Wurzelknoten.
- (N2) Für jeden Knoten $d \in V(D)$ existieren maximal zwei Nachfolger.
Das heißt, es gilt $\text{out}(d) \leq 2$.
- (N3) Für jeden Knoten $d_0 \in V(D)$ mit zwei Nachfolgern $d_1, d_2 \in V(D)$ gilt $X_{d_0} = X_{d_1} = X_{d_2}$.
- (N4) Für jeden Knoten $d_0 \in V(D)$ mit genau einem Nachfolger $d_1 \in V(D)$ gilt $|X_{d_0} \Delta X_{d_1}| = 1$.

Dabei bezeichne $X_{d_0} \Delta X_{d_1} := (X_{d_0} \cup X_{d_1}) \setminus (X_{d_0} \cap X_{d_1})$ die symmetrische Differenz von X_{d_0} und X_{d_1} .

Bemerkung:

Für die Beschreibung der Normalform von Jan Obdržálek sei an dieser Stelle auf seine Arbeit [16] verwiesen. Der darin enthaltene Algorithmus zur Umformung hat dabei eine lineare Laufzeit bezüglich der Größe von D .

Entgegen der Behauptung des Autors (Lemma 3.1 in [16]) kann aber die Umformung zur Normalform die Weite der DAG-Zerlegung verringern.

In [6] werden die initialen Knoten des DAGs mit „roots“ (zu deutsch: Wurzeln) bezeichnet. Um eine Verwechslung mit dem Begriff der Wurzelknoten auszuschließen, wird bei nachfolgenden Zitaten die Formulierung entsprechend der hier verwendeten Notation abgewandelt.

Im Nachfolgenden werden die Transformationen aus [6] kurz vorgestellt, da mit ihnen die Existenz einer DAG-Zerlegung in Normalform beweisbar ist. Gleichzeitig zeigen diese Transformationen einige Möglichkeiten zur Umformung einer DAG-Zerlegung, bei denen die Weite der DAG-Zerlegung erhalten bleibt.

3.6.1 Lemma: (vgl. Lemma 17 in [6])

Sei G ein Digraph und (D, X) eine DAG-Zerlegung von G mit Weite k . Seien außerdem d_1, d_2, \dots, d_m die initialen Knoten von D . Dann bildet das geordnete Paar (D', X') mit $D' = (V', E', \mu')$ und

- $V' := V(D) \dot{\cup} \{r\}$,
- $E' := E(D) \cup \{(r, d_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$,
- $X' := X \cup \{X_r\}$ mit $X_r := \emptyset$

eine DAG-Zerlegung von G mit Weite k , wobei D' einen eindeutigen initialen Wurzelknoten besitzt. Die Konstruktion ist in Abbildung 3.14 dargestellt.

Definition: (Aufspaltung; vgl. [6])

Sei (D, X) eine DAG-Zerlegung eines Digraphen G und $d_0 \in V(D)$ besitze $m > 1$ Nachfolger d_1, d_2, \dots, d_m . Durch die Aufspaltung des Knotens d_0 entsteht ein geordnetes Paar (D', X') wie folgt.

- $V(D') := V(D) \dot{\cup} \{d_l, d_r\}$
- $E(D') := (E(D) \setminus \{(d_0, d_i) \mid 1 \leq i \leq m\}) \cup E'$
mit $E' := \{(d_0, d_l), (d_0, d_r), (d_l, d_1)\} \cup \{(d_r, d_i) \mid 2 \leq i \leq m\}$

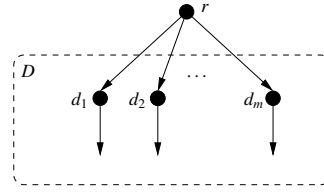


Abbildung 3.14: Konstruktionsschema für die Bildung eines eindeutigen initialen Wurzelknotens für eine DAG-Zerlegung nach Lemma 3.6.1

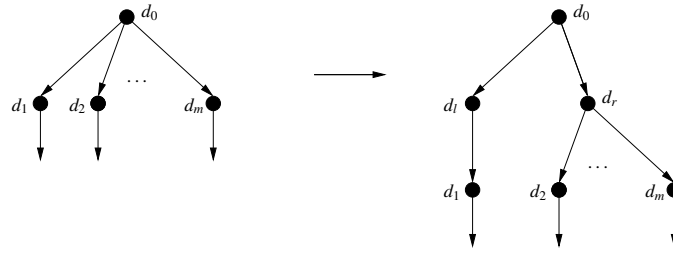


Abbildung 3.15: Konstruktionsschema für die Aufspaltung eines Knotens d_0 in einer DAG-Zerlegung

- $X' := X \cup \{X_{d_l}, X_{d_r}\}$ mit $X_{d_l} = X_{d_r} := X_{d_0}$

Die Konstruktion ist in Abbildung 3.15 dargestellt.

3.6.2 Lemma: (vgl. Lemma 19 in [6])

Sei (D, X) eine DAG-Zerlegung eines Digraphen G und $d_0 \in V(D)$ besitze $m > 1$ Nachfolger d_1, d_2, \dots, d_m . Dann ist das durch Aufspaltung des Knotens d_0 entstandene geordnete Paar (D', X') eine DAG-Zerlegung von G mit Weite k .

Definition: (Hinzufügen; vgl. [6])

Sei (D, X) eine DAG-Zerlegung eines Digraphen G . Des Weiteren seien $d_0, d_1 \in V(D)$ mit $(d_0, d_1) \in E(D)$ und $X \subseteq V(G)$. Durch das Hinzufügen von X zu (d_0, d_1) entsteht das geordnete Paar (D', X') wie folgt.

- $V(D') := V(D) \dot{\cup} \{d_X\}$
- $E(D') := (E(D) \setminus \{(d_0, d_1)\}) \cup \{(d_0, d_X), (d_X, d_1)\}$
- $X' := X \cup \{X_{d_X}\}$ mit $X_{d_X} := X$

Die Konstruktion ist in Abbildung 3.16 dargestellt.

3.6.3 Lemma: (vgl. Lemma 21 in [6])

Sei (D, X) eine DAG-Zerlegung eines Digraphen G mit Weite k . Des Weiteren seien $d_0, d_1 \in V(D)$ mit $(d_0, d_1) \in E(D)$ und $X \subseteq V(G)$ und (D', X') das durch Hinzufügen von X zu (d_0, d_1) entstandene geordnete Paar. Falls eine der beiden Bedingungen

- (i) $X_{d_0} \cap X_{d_1} \subseteq X \subseteq X_{d_0}$ oder
- (ii) $X_{d_0} \cap X_{d_1} \subseteq X \subseteq X_{d_1}$

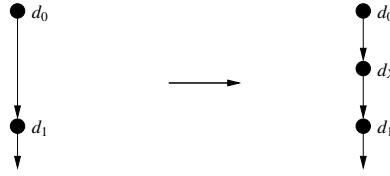


Abbildung 3.16: Konstruktionsschema für das Hinzufügen von X zur Kante (d_0, d_1) einer DAG-Zerlegung

erfüllt ist, ist (D', X') eine DAG-Zerlegung von G mit Weite k .

Mit Hilfe der Lemmas 3.6.1, 3.6.2 und 3.6.3 lässt sich nun eine DAG-Zerlegung in die Normalform transformieren, wobei die Weite gleich bleibt.

3.6.4 Satz: (vgl. Theorem 22 in [6])

Falls ein Digraph D eine DAG-Zerlegung mit Weite k besitzt, dann besitzt D auch eine DAG-Zerlegung mit Weite k in Normalform.

Des Weiteren erfüllt die DAG-Weite in der hier verwendeten Notation alle in Kapitel 3.2 aufgeführten Forderungen.

3.6.5 Satz: (vgl. Lemma 5.1 in [16])

Die DAG-Weite erfüllt die Bedingung (**General**).

3.6.6 Korollar: (vgl. Lemma 3.2 in [16], Theorem 24 in [6])

Die DAG-Weite erfüllt die Bedingung (**Union**).

Beweis:

In den genannten Quellen wurden sehr verschiedene Beweisideen vorgestellt, die an dieser Stelle nochmals näher ausgeführt werden. Dabei seien G_1 und G_2 disjunkte Digraphen und G mit $G = G_1 \vec{\cup} G_2$ eine gerichtete Vereinigung von G_1 und G_2 . Des Weiteren seien (D_1, X_1) und (D_2, X_2) eine jeweilige DAG-Zerlegung von G_1 bzw. G_2 .

O.B.d.A. seien D_1 und D_2 disjunkt.

Im Beweis von Lemma 3.2 in [16] wurde die einfachste Variante zur Konstruktion einer DAG-Zerlegung (D, X) von G dargestellt. Diese ist wie folgt definiert.

- $V(D) := V(D_1) \cup V(D_2)$
- $E(D) := E(D_1) \cup E(D_2)$
- $X := X_1 \cup X_2$

Allerdings liegt die so entstandene DAG-Zerlegung niemals in Normalform vor, da bereits (**N1**) nicht mehr erfüllt ist. Alle initialen Knoten von D_1 und D_2 sind bei dieser Konstruktion auch in D initial und wegen Lemma 1.1.3 besitzen D_1 und D_2 je mindestens einen initialen Knoten.

Der Ansatz in Theorem 24 in [6] umgeht dieses Problem in Form folgender Konstruktion von (D, X) .

- $V(D) := V(D_1) \cup V(D_2)$

- $E(D) := E(D_1) \cup E(D_2) \cup E'$ mit $E' := \{ (d_1, d_2) \mid d_1 \text{ Blatt in } D_1, d_2 \text{ in } D_2 \text{ initial} \}$
- $X := X_1 \cup X_2$ □

Damit erfüllt D automatisch die Bedingung **(N1)**, wenn sie von D_1 erfüllt ist. Liegen (D_1, X_1) und (D_2, X_2) in Normalform vor, so liegt auch (D, X) in Normalform vor. Die beiden Konstruktionen sind in Abbildung 3.17 dargestellt.

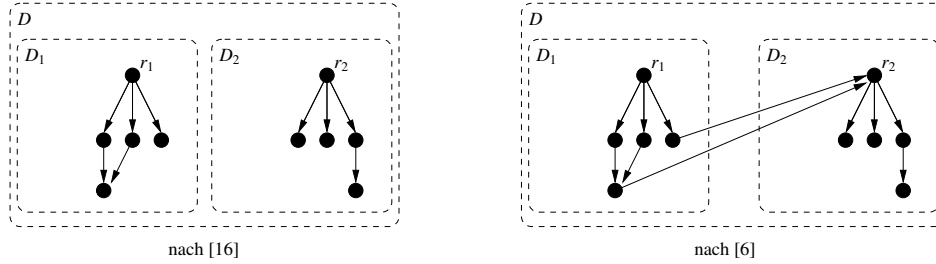


Abbildung 3.17: Konstruktionsschemata einer DAG-Zerlegung für die gerichtete Vereinigung $D_1 \vec{\cup} D_2$ nach Satz 3.6.5.

Nach Lemma 3.2.4 folgt aus der erfüllten Eigenschaft **(Union)** somit direkt eine analoge Aussage zur Bedingung **(Acyclic)**. Für die DAG-Weite lautet diese nun wie folgt.

3.6.7 Korollar:

Die DAG-Weite eines Digraphen D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 beträgt $dgw(D) = 0$.

Beweis:

Mit Satz 3.6.5 ist Lemma 3.2.4 anwendbar und liefert

$$dgw(D) = dgw(K_d^1) = 0 .$$

□

Insbesondere kann jeder DAG als Grundlage für seine DAG-Zerlegung herangezogen werden. Dies gilt ebenso für Digraphen ohne Zyklen der Länge ≥ 2 , da deren Schlingen keinen Einfluss auf die DAG-Zerlegung und somit auf die DAG-Weite haben. Im Kapitel 3.6.1 wird sogar in Proposition 3.6.11 gezeigt, dass es keine weiteren Digraphen mit DAG-Weite 0 gibt.

3.6.1 DAG-Weite und Räuber-und-Gendarmen-Spiele

Ähnlich wie die Baumweite von Graphen und die arboreale Weite von Digraphen steht auch die DAG-Weite von Digraphen mit Gewinnstrategien in einem Räuber-und-Gendarmen-Spiel in Beziehung. Dabei unterscheidet sich die Spielvariante von der in Kapitel 3.3.1 vorgestellten Version des gerichteten Räuber-und-Gendarmen-Spiels auf Digraphen und wird hier näher vorgestellt.

Definition: (*Spielvariante II*, $cn_2(D)$; vgl. [16], [5], [6])

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph. Dann ist das (gerichtete) Räuber-und-Gendarmen-Spiel (*Spielvariante II*) mit k Gendarmen wie folgt definiert.

- Die Gendarmen wählen ein $X_0 \in [V]^{\leq k}$ und der Räuber wählt einen Knoten $r_0 \in V - X_0$. Dies bezeichnet die *Position* (X_0, r_0) .

- Sei (X_i, r_i) die aktuelle Position und $r_i \notin X_i$. Dann wählen die Gendarmen ein $X_{i+1} \in [V]^{\leq k}$ und der Räuber einen Knoten r_{i+1} so, dass ein Dipfad von r_i nach r_{i+1} existiert, der keinen Knoten aus $X_i \cap X_{i+1}$ enthält.
- Sei (X_i, r_i) die aktuelle Position und $r_i \in X_i$. Dann haben die Gendarmen den Räuber gefangen und die Gendarmen somit gewonnen.

Dabei ist den Gendarmen zu jeder Zeit die aktuelle Position des Räubers bekannt. Das heißt, der Räuber ist für die Gendarmen sichtbar.

Die Gendarmenzahl von D wird bei dieser Spielvariante mit $cn_2(D)$ bezeichnet.

Bei dieser Spielvariante fällt vor allem die Zugbedingung des Räubers auf. Im Gegensatz zur Spielvariante I in Kapitel 3.3.1 muss kein Dipfad von r_{i+1} zurück nach r_i existieren. Der Räuber ist demzufolge nicht mehr auf die stark zusammenhängende Komponente von $D - (X_i \cap X_{i+1})$ beschränkt, in welcher r_i enthalten ist. Da auf diese Weise im Vergleich zu Spielvariante I zusätzliche Partien möglich werden, stellt die Spielvariante II eine Verallgemeinerung der Spielvariante I dar.

Bemerkung:

Wie bereits im Kapitel 3.3.1 werden die in Kapitel 2.5 vorgestellten Begriffe im Zusammenhang mit Räuber-und-Gendarmen-Spielen in natürlicher Weise auch für diese Spielvariante verwendet.

In [6] wurde zudem gezeigt, dass ähnlich wie im Satz 2.5.2 über Räuber-und-Gendarmen-Spiele auf Graphen, die Existenz einer Gendarmen-monotonen Gewinnstrategie die Existenz einer Räuber-monotonen Gewinnstrategie zulässt. Es folgt sogar die Existenz einer Gewinnstrategie, welche gleichzeitig Gendarmen- und Räuber-monoton ist.

3.6.8 Lemma: (vgl. Lemma 9 in [6])

Besitzen k Gendarmen eine Gendarmen-monotone oder eine Räuber-monotone Gewinnstrategie im Spiel auf dem Digraphen D , dann existiert auch eine Gewinnstrategie für k Gendarmen, welche sowohl Gendarmen- als auch Räuber-monoton ist.

Dies lässt sich in natürlicher Weise zur Definition monotoner Gewinnstrategien zusammenführen.

Definition: (monotone Gewinnstrategie; vgl. [6])

Eine Gewinnstrategie τ für die Gendarmen eines Räuber-und-Gendarmen-Spiels heißt *monoton*, falls sie sowohl Gendarmen- als auch Räuber-monoton ist.

Während in [16] die DAG-Weite mit den monotonen Gewinnstrategien der Gendarmen in Verbindung gebracht wurde, definierten die Autoren von [5] und [6] die DAG-Weite ausgehend von diesen Gewinnstrategien. In beiden Fällen resultierte folgender Satz.

3.6.9 Satz: (vgl. Theorem 4.2 und 4.3 in [16], 3.11 in [5], 12 in [6])

Für jeden Digraph D existiert genau dann eine DAG-Zerlegung mit Weite k , wenn $k + 1$ Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf D eine monotone Gewinnstrategie besitzen.

Des Weiteren lässt sich die Menge aller Digraphen mit Gendarmenzahl gleich 1 charakterisieren.

3.6.10 Lemma: (vgl. Lemma 4 in [6] für schlichte Digraphen)

Die Gendarmenzahl eines Digraphen D ist genau dann gleich 1, wenn D keinen Zyklus der Länge ≥ 2 besitzt.

Beweis:

Nach Satz 3.6.7 ist bereits bekannt, dass jeder Digraph D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 eine DAG-Weite von 0 besitzt. Nach Satz 3.6.9 reicht nun bereits ein einziger Gendarm für die Existenz einer monotonen Gewinnstrategie im Spiel auf D . Für weniger Gendarmen existiert weder eine monotone noch eine normale Gewinnstrategie. So ist die Gendarmenzahl gleich 1.

Angenommen ein Digraph D besitzt Gendarmenzahl gleich 1 und enthält aber einen Zyklus der Länge ≥ 2 . Dann sind mindestens 2 Gendarmen nötig, um den Räuber auf der Knotenmenge des Zyklus zu fassen. Somit ist die Gendarmenzahl in jedem Fall ≥ 2 . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und somit die Äquivalenz bewiesen. \square

Folgende Proposition überträgt das Ergebnis von Lemma 3.6.10 auf die DAG-Weite.

3.6.11 Proposition:

Die DAG-Weite eines Digraphen D ist genau dann 0, wenn D keinen Zyklus der Länge ≥ 2 besitzt.

Beweis:

Für einen Digraphen D sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) D besitzt eine DAG-Weite von 0.
- (ii) D besitzt eine Gendarmenzahl von 1.
- (iii) D besitzt keinen Zyklus der Länge ≥ 2 .

Dabei gilt die Äquivalenz von (i) und (ii) wegen Satz 3.6.9 und die Äquivalenz von (ii) und (iii) gilt wegen Lemma 3.6.10. \square

3.6.2 Resultate und Anwendungen

In diesem Kapitel werden einige ausgewählte Resultate für DAG-Zerlegungen und ihre Anwendung zusammengetragen.

3.6.12 Lemma:

Sei D ein Digraph, dann gilt $dtw(D) \leq dgw(D) \leq tw(U(D))$.

Beweis:

Die arboreale Weite $dtw(D)$ impliziert die Existenz einer Räuber-monotonen Gewinnstrategie für $dtw(D)$ Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel nach Spielvariante I. Die DAG-Weite impliziert die Existenz einer monotonen Gewinnstrategie für $dgw(D)$ Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel nach Spielvariante II. Weil jedoch die Spielvariante II eine Verallgemeinerung der Spielvariante I darstellt, folgt direkt $dtw(D) \leq dgw(D)$.

Wird der zugrundeliegende Graph $G := U(D)$ eines Digraphen D wechselseitig orientiert zu $D(G)$, so entspricht dies einer Ersetzung aller Kanten in D durch je ein Paar wechselseitig orientierter Kanten. Das heißt, D ist zu einem Teilgraph von $D(G)$ isomorph. Mit der Eigenschaft (**General**) und dem später in dieser Arbeit bewiesenen Satz 3.8.4 folgt die gesuchte Beziehung mit $tw(G) \geq dgw(D(G)) \geq dgw(D)$. \square

Sei \mathcal{K} eine Klasse von Digraphen und $k \in \mathbb{N}_0$ eine obere Schranke für die DAG-Weite dieser Klasse. Das heißt, für alle $D \in \mathcal{K}$ gilt $dgw(D) \leq k$. Wegen Lemma 3.6.12 folgt, dass k auch eine obere Schranke für die arboreale Weite der Klasse \mathcal{K} ist. So sind alle Resultate für Klassen mit beschränkter arborealer Weite auch für alle Klassen mit beschränkter DAG-Weite gültig.

Bisher ist es noch nicht gelungen, Resultate für Klassen mit beschränkter DAG-Weite zu formulieren, welche für Klassen mit beschränkter arborealer Weite widerlegt werden konnten. Über so genannte Paritätsspiele („Parity Games“) lassen sich nicht nur die Existenz von Algorithmen zur Berechnung einer DAG-Zerlegung finden, sondern es ist sogar möglich diese Spiele für Digraphen mit beschränkter DAG-Weite effizient zu lösen. An dieser Stelle werden allerdings nur einige ausgewählte Resultate aufgeführt. Für Details zu Paritätsspielen sei auf die Arbeit [6] verwiesen.

3.6.13 Proposition: (vgl. Theorem 25 in [6])

Sei D ein Digraph und $k \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist das Entscheidungsproblem, ob $dgw(D) \leq k$ gilt, NP-schwer.

3.6.14 Satz: (vgl. Theorem 26 in [6])

Sei D ein Digraph und $k < w$, dann existiert ein Algorithmus mit polynomielltem Zeitaufwand, um zu entscheiden, ob k Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel nach Spielvariante II eine monotone Gewinnstrategie besitzen. Des weiteren ist es mit polynomielltem Zeitaufwand möglich, diese Gewinnstrategie berechnen.

Die erhaltene monotone Gewinnstrategie für die Spielvariante II lässt sich nun mit polynomiellen Aufwand in eine DAG-Zerlegung umformen.

3.6.15 Satz: (vgl. Proposition 27 in [6])

Sei D ein Digraph mit $dgw(D) = k$, dann ist es möglich mit polynomielltem Zeitaufwand eine DAG-Zerlegung von D mit Weite k zu berechnen.

Schließlich konnte nach umfangreichen Untersuchungen in [6] folgendes Resultat für Paritätsspiele auf Digraphen mit beschränkter DAG-Weite nachgewiesen werden.

3.6.16 Proposition: (vgl. Theorem 32 in [6])

Sei $k \in \mathbb{N}$, dann existiert ein Algorithmus, welcher für alle Digraphen D mit $dgw(D) \leq k$ den Gewinner des Paritätsspiels auf D mit polynomielltem Zeitaufwand bestimmt.

Dabei sei anzumerken, dass eine solche Aussage für Digraphen mit beschränkter arborealer Weite bisher noch nicht bekannt ist.

3.7 Räuber-und-Gendarmen-Spiele auf Digraphen

Im Zusammenhang mit der arborealen Weite und der DAG-Weite wurden bereits die zwei Spielvarianten I und II eingeführt. Die Gendarmenzahlen dieser Spielvarianten lassen sich wiederum als Invarianten des zugrundeliegenden Digraphen auffassen und auf die Bedingungen für eine gerichtete Version der Baumweite testen. Dabei lassen sich analoge Aussagen wie für die arboreale Weite und DAG-Weite formulieren.

3.7.1 Satz:

Sei G ein Graph, dann gilt $cn(G) = cn_1(D(G)) = cn_2(D(G))$.

Beweis:

In $D(G)$ ist jede schwach zusammenhängende Knotenmenge auch stark zusammenhängend. Damit folgt bereits, dass die Spielvarianten I und II für das Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf Digraphen identisch sind und es gilt daher die Gleichheit $cn_1(D(G)) = cn_2(D(G))$.

Des Weiteren ist jede in G zusammenhängende Knotenmenge in $D(G)$ stark zusammenhängend und umgekehrt. Daher sind die Spielvarianten I und II mit dem Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf Graphen identisch und es gilt daher die Gleichheit $cn(D(G)) = cn_1(D(G)) = cn_2(D(G))$. \square

3.7.2 Satz:

Sei D eine gerichtete Vereinigung der disjunkten Digraphen D_1 und D_2 , dann gilt $cn_i(D) = \max \{ cn_i(D_1), cn_i(D_2) \}$ für $i = 1, 2$.

Beweis:

Der Beweis erfolgt unabhängig davon, welche der beiden Spielvarianten zu Grunde liegt. Daher ist $i \in \{ 1, 2 \}$ beliebig wählbar.

Seien τ_1 eine Gewinnstrategie für $cn_i(D_1)$ Gendarmen im Spiel auf D_1 und τ_2 eine Gewinnstrategie für $cn_i(D_2)$ Gendarmen im Spiel auf D_2 .

Eine Gewinnstrategie τ für $\max \{ cn_i(D_1), cn_i(D_2) \}$ Gendarmen im Spiel auf D kann dabei auf die bereits bekannten Gewinnstrategien τ_1 und τ_2 zurückgreifen. Zur Vereinfachung wählen die Gendarmen zu Beginn keinen Knoten aus, wodurch dem Räuber die gesamte Knotenmenge von D zur Verfügung steht. Nun lassen sich zwei Typen von möglichen Partien unterscheiden.

Bei dem ersten Typ einer Partie wählt der Räuber zu Beginn einen Knoten aus D_2 . Da es in D keinen Dipfad von der Knotenmenge $V(D_2)$ zu den Knoten in $V(D_1)$ gibt, lässt sich nun die Gewinnstrategie τ_2 anwenden, wodurch der Räuber gefasst wird.

Bei dem zweiten Typ einer Partie wählt der Räuber zu Beginn einen Knoten aus D_1 . Solange sich der Räuber in der Knotenmenge $V(D_1)$ aufhält, lässt sich die Gewinnstrategie τ_1 anwenden. Daher wird der Räuber entweder durch τ_1 gefasst oder wechselt zu einem Knoten aus $V(D_2)$. Werden nach dem Wechsel alle Gendarmen aus dem Spiel entfernt, entsteht eine Startposition für eine Partie vom ersten Typ, welche bekanntermaßen gewonnen werden kann.

Um beide Typen von Partien in jedem Fall zu gewinnen, sind für τ genau so viele Gendarmen nötig, wie für die einzelnen Gewinnstrategien τ_1 und τ_2 benötigt werden. Damit folgt die Aussage des Satzes $cn_i(D) = \max \{ cn_i(D_1), cn_i(D_2) \}$.

In der Spielvariante I vereinfacht sich der zweite Typ einer Partie, da es dem Räuber auf Grund des fehlenden Rückwegs von $V(D_2)$ nach $V(D_1)$ bereits verboten ist, zu einem Knoten aus $V(D_2)$ zu wechseln. Die Aussage des Satzes bleibt allerdings unverändert. \square

3.7.3 Korollar:

Für jeden Digraphen D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 beträgt die Gendarmenzahl $cn_i(D) = 1$ für $i = 1, 2$.

Beweis:

Der Beweis erfolgt unabhängig davon, welche der beiden Spielvarianten zu Grunde liegt. Daher ist $i \in \{ 1, 2 \}$ beliebig wählbar.

Eine Gewinnstrategie τ für einen Gendarmen im Spiel auf D lässt sich wie folgt definieren.

$$\tau : [V]^{\leq 1} \times V \rightarrow [V]^{\leq 1} : (X, r) \mapsto \{ r \}$$

Das heißt, der Gendarm besetzt im nächsten Schritt immer die letzte Position des Räubers. Weil D aber keine Zyklen der Länge ≥ 2 besitzt, kann der Räuber keinen Knoten erneut besetzen, welchen er zuvor verlassen hat. Daher ist mit τ eine monotone Gewinnstrategie beschrieben, welche bereits nur so viele Gendarmen benutzt, wie für die Existenz einer Gewinnstrategie nötig sind. Die Gendarmenzahl beträgt somit $cn_1(D) = cn_2(D) = 1$.

In der Spielvariante I ist es dem Räuber auf D nicht mehr erlaubt, die Position zu wechseln, da jede stark zusammenhängende Knotenmenge von D einelementig ist. Dadurch verkürzt sich zwar jede τ -konsistente Partie, aber die Gendarmenzahl sinkt dadurch nicht. \square

3.8 Eingeschränkte Minorenrelation für Digraphen

Im Kapitel 3.1 wurde bereits die Minorenrelation für Digraphen formuliert. Allerdings wurde durch Satz 3.1.4 auch deutlich, dass mit dieser Definition der Minoren von Digraphen bereits die Charakterisierung der relativ einfachen Menge der Digraphen ohne Zyklen der Länge ≥ 2 misslingt. In der Arbeit [15] wurde daher ein neuer Vorschlag in Form einer eingeschränkten Minorenrelation vorgestellt. Im Abschnitt 3.8.3 wird dieser Ansatz später näher vorgestellt.

Zuvor werden allerdings einige allgemeine Betrachtungen zur Einschränkung der Minorenrelation durchgeführt und Anforderungen an eine solche Einschränkung formuliert. Nachfolgend wird anhand dieser Betrachtungen eine eingeschränkte Minorenrelation, welche die aufgestellten Anforderungen erfüllt, systematisch formuliert. Dabei wird der Ansatz aus [15] in diese Konstruktion eingegliedert.

Wie bereits durch Satz 3.1.4 deutlich wurde, ist es eine natürliche Forderung, dass die Minorenrelation \leq soweit eingeschränkt werden sollte, dass die Menge der Digraphen ohne Zyklen der Länge ≥ 2 unter der so eingeschränkten Minorenrelation \leq_r abgeschlossen ist und somit folgende Bedingung erfüllt.

Sei D ein Digraph ohne Zyklus der Länge ≥ 2 .
Dann besitzt kein Minor von D unter \leq_r einen Zyklus der Länge ≥ 2 . (DAG)

Des Weiteren ist es wünschenswert, dass die gerichteten Versionen der Baumweite mit der Minorenbildung unter \leq_r vereinbar sind. Das heißt, dass die Bildung eines Minors unter \leq_r die gerichteten Versionen der Baumweiten nicht erhöht. Dabei sind die Invarianten arboreale Weite, D-Weite, DAG-Weite und die Gendarmenzahlen der Spielvarianten I und II näher zu untersuchen, so dass die folgende Bedingung erfüllt ist.

Sei D ein Digraph, dann gilt für jeden $D' \leq_r D$ die Eigenschaft $inv(D') \leq inv(D)$. (Closed)

3.8.1 Die Teilgraphenrelation für Digraphen \subseteq

In der Definition der Minoren von Digraphen entsteht ein Minor durch Löschung von Knoten und Kanten und anschließenden Kantenkontraktionen. In diesem Kapitel soll zunächst die Löschung von Knoten und Kanten untersucht werden, welches die Bildung eines Teilgraphen darstellt. Dabei folgen direkt die Bedingungen (DAG) und (Closed).

3.8.1 Lemma:

Die Teilgraphenrelation \subseteq für Digraphen erfüllt die Bedingung (DAG).

Beweis:

Wäre (DAG) für \subseteq nicht erfüllt, dann gibt es Digraphen D und D' mit $D' \subseteq D$, so dass D' einen Zyklus der Länge ≥ 2 enthält und D nicht. Allerdings enthält D alle Knoten und Kanten von D' und somit auch den Zyklus der Länge ≥ 2 . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass \subseteq die Bedingung (DAG) nicht erfüllt. □

Zur Untersuchung der Eigenschaft (Closed) wird die Löschung von Kanten und Knoten in den nachfolgenden Lemmas getrennt betrachtet.

3.8.2 Lemma:

Sei D ein Digraph und $E \subseteq E(D)$. Dann gelten für $D' := D - E$ folgende Eigenschaften.

- $dtw(D') \leq dtw(D)$

- $dw(D') \leq dw(D)$
- $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i \in \{1, 2\}$
- $dgw(D') \leq dgw(D)$

Beweis:

Sei (R, X, W) eine arboreale Zerlegung von D mit Weite $dtw(D)$. Die Bedingungen (A1) und (A2) bleiben von der Löschung der Kantenmenge E aus D unberührt. Dadurch ist das Tripel (R, X, W) auch eine arboreale Zerlegung von D' mit Weite $dtw(D)$ und es folgt daher die Behauptung $dtw(D') \leq dtw(D)$.

Sei (T, X) eine D-Zerlegung von D mit Weite $dw(D)$. Da die Knotenmenge von der Löschung der Kanten unberührt bleibt, ist die Bedingung (C1) weiterhin erfüllt. Jede stark zusammenhängende Knotenmenge $S \subseteq V(D') \subseteq V(D)$ ist auch in D stark zusammenhängend. Daher ist (C2) auch weiterhin für (T, X) auf D' erfüllt. Damit ist das geordnete Paar (T, X) ebenfalls eine D-Zerlegung von D' mit Weite $dw(D)$ und es folgt somit die Behauptung $dw(D') \leq dw(D)$.

Sei τ eine Gewinnstrategie für $cn_i(D)$ Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf D mit $i \in \{1, 2\}$ je nach der verwendeten Spielvariante I bzw. II. Da durch die Löschung von Kanten nur die Bewegungen des Räubers eingeschränkt werden, ist die Strategie τ auch auf D' anwendbar und weiterhin eine Gewinnstrategie. Damit folgt die Behauptung $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ mit $i \in \{1, 2\}$.

Sei (G, X) eine DAG-Zerlegung von D , dann bleiben die Bedingungen (D1), (D2) und (D3) auch weiterhin erfüllt, da die Knotenmenge unangetastet bleibt. Damit ist (G, X) auch eine DAG-Zerlegung von D' und es folgt die Behauptung $dgw(D') \leq dgw(D)$. \square

3.8.3 Lemma:

Sei D ein Digraph und $V \subseteq V(D)$. Dann gelten für $D' := D - V$ folgende Eigenschaften.

- $dtw(D') \leq dtw(D)$
- $dw(D') \leq dw(D)$
- $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i \in \{1, 2\}$
- $dgw(D') \leq dgw(D)$

Beweis:

Für den Beweis werden die Knoten aus V einzeln aus D entfernt. Da der Beweis für alle angegebenen Invarianten identisch führbar ist, repräsentiert inv nachfolgend eine der jeweiligen Invarianten.

Mit der Löschung eines Knotens $v \in V$ ist auch die Löschung der Kanten $E := \{e \in E(D) \mid e \sim v\}$ verbunden, welche mit dem Knoten v inzidierten. Zunächst lassen sich diese Kanten aus D entfernen, wonach der Knoten v in $D'' := D - E$ isoliert ist. Jede der Invarianten erfüllt nach Lemma 3.8.2 die Bedingung $inv(D'') = inv(D - E) \leq inv(D)$.

Es lassen sich nun zwei Digraphen $D_1 := D'' - v$ und $D_2 := D''[v]$ definieren und D'' ist als eine gerichtete Vereinigung $D_1 \vec{\cup} D_2$ dieser Digraphen darstellbar. Da jede der Invarianten die Eigenschaft (Union) erfüllt (siehe Satz 3.3.2, 3.5.2, 3.6.5, 3.7.2) folgt

$$inv(D'') = \max \{ inv(D_1), inv(D_2) \} \leq inv(D) \quad \text{und} \quad inv(D_1) = inv(D - v) \leq inv(D) .$$

Wurden alle Knoten von V aus D entfernt, folgt somit die Behauptung $\text{inv}(D') \leq \text{inv}(D)$ für jede der Invarianten. \square

3.8.4 Satz:

Sei D ein Digraph und D' ein Teilgraph von D , dann gelten folgende Eigenschaften.

- $\text{dtw}(D') \leq \text{dtw}(D)$
- $\text{dw}(D') \leq \text{dw}(D)$
- $\text{cn}_i(D') \leq \text{cn}_i(D)$ für $i \in \{1, 2\}$
- $\text{dgw}(D') \leq \text{dgw}(D)$

Beweis:

Wenn D' ein Teilgraph von D ist, dann existieren $E \subseteq E(D)$ und $V \subseteq V(D)$, so dass $D' = (D - E) - V$ gilt. Weil sich der Beweis für alle angegebenen Invarianten identisch führen lässt, werden diese nachfolgend jeweils durch inv repräsentiert.

Mit Lemma 3.8.2 und Lemma 3.8.3 folgt bereits die Behauptung

$$\text{inv}(D') = \text{inv}((D - E) - V) \leq \text{inv}(D - E) \leq \text{inv}(D)$$

für alle angegebenen Invarianten. \square

Aufgrund von Satz 3.8.4 reicht es nun, sich bei der systematischen Herleitung einer eingeschränkten Minorenrelation für Digraphen auf die Untersuchung von Kantenkontraktionen zu beschränken.

3.8.2 Die topologische Minorenrelation für Digraphen \leq_t

In Kapitel 2.2 wurde bereits die topologische Minorenrelation für Graphen vorgestellt. Diese lässt sich in ähnlicher Weise auf Digraphen übertragen, wie es bereits in Kapitel 3.1 für die (gewöhnliche) Minorenrelation dargestellt wurde. Dazu wird zunächst eine gerichtete Version einer Unterteilung definiert.

Definition: ((gerichtete) Unterteilung, Unterteilungsknoten, Verzweigungsknoten)

Seien G und H Digraphen. Dann ist H eine ((gerichtete) Unterteilung von G , wenn die Kanten von G so durch Dipfade der Länge ≥ 1 ersetzt werden können, dass der Digraph H resultiert.

Bei der Ersetzung einer Kante $e \in E(G)$ mit $\mu(e) = (x, y)$ durch einen Dipfad der Länge $k \geq 1$ werden somit folgende Änderungen an $G = (V, E, \mu)$ durchgeführt, dass daraus die Unterteilung $G' = (V', E', \mu')$ von G entsteht.

- $V' := V \cup \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$
- $E' := E \cup \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$
- $\mu'(e') = \begin{cases} \mu(e') & , \text{für } e' \in E \setminus \{e\} \\ (x, x_1) & , \text{für } e' = e \\ (x_i, x_{i+1}) & , \text{für } e' = e_i \text{ mit } i = 1, \dots, k-2 \\ (x_{k-1}, y) & , \text{für } e' = e_{k-1} \end{cases}$

Die Knoten in $V(G) \subseteq V(G')$ werden als *Verzweigungsknoten* und die Knoten in $V(G') \setminus V(G)$ als *Unterteilungsknoten* bezeichnet. Dabei besitzen die Verzweigungsknoten den gleichen Grad wie in G und für jeden Unterteilungsknoten v gilt $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v) = 1 = \text{in}(v) = \text{out}(v)$.

Definition: (*topologischer Minor*)

Seien G und H Digraphen. Dann ist G genau dann ein *topologischer Minor* von H , wenn ein Teilgraph H' von H so existiert, dass dieser eine Unterteilung von G ist.

Die Beziehung „ G ist topologischer Minor von H “ beschreibt dabei eine Quasiordnung (reflexiv und transitiv) auf der Menge der Digraphen. Diese wird als *topologische Minorenrelation* \preceq_t bezeichnet. Formal bedeutet dies:

$$G \text{ ist topologischer Minor von } H \quad \Leftrightarrow \quad G \preceq_t H.$$

Insbesondere erfüllt die topologische Minorenrelation \preceq_t für Digraphen weiterhin die Bedingung **(DAG)**.

3.8.5 Satz:

Die topologische Minorenrelation \preceq_t für Digraphen erfüllt die Bedingung **(DAG)**.

Beweis:

Seien D und D' Digraphen mit $D' \preceq_t D$. Durch Lemma 3.8.1 ist die Betrachtung von Teilgraphen bereits erfolgt und o.B.d.A. kann daher angenommen werden, dass D eine Unterteilung von D' ist.

Angenommen \preceq_t erfüllt **(DAG)** nicht und D' enthält einen Zyklus der Länge ≥ 2 , obwohl D keinen solchen Zyklus enthält. Die in dem Zyklus enthaltenen Knoten sind als Verzweigungsknoten V_1 auch in D enthalten. Bei der Unterteilung von D' zu D wurden dabei die Kanten zwischen diesen Verzweigungsknoten durch Dipfade der Länge ≥ 1 ersetzt. Dabei entstanden zwischen den Knoten von V_1 entlang des Zyklus weitere Unterteilungsknoten V_2 . Die Knotenmenge $V_1 \cup V_2$ bildet somit entgegen der Annahme einen Zyklus der Länge ≥ 2 in D . Mit diesem Widerspruch zur Annahme folgt die Bedingung **(DAG)** für die topologische Minorenrelation für Digraphen. \square

3.8.6 Lemma:

Seien G und H Digraphen und H eine Unterteilung von G , dann kann H durch schrittweise Ersetzung einzelner Kanten aus G durch Dipfade der Länge 2, mit gleichen Anfangs- und Endknoten wie die ersetzte Kante, gebildet werden.

Beweis:

Zunächst kann die Konstruktion schrittweise in Form einer Ersetzung einer einzelnen Kante durch den entsprechenden Dipfad der Länge ≥ 2 erfolgen. Die Ersetzung einer einzelnen Kante wiederum kann als schrittweise Ersetzung durch jeweils einen Dipfad der Länge 2 beschrieben werden, wodurch immer genau ein Unterteilungsknoten hinzugefügt wird. \square

Für einen Spezialfall erfüllt die topologische Minorenrelation für Digraphen sogar die Bedingung **(Closed)**.

3.8.7 Satz:

Seien D und D' Digraphen und $D' \preceq_t D$, wobei jeder Unterteilungsknoten eine stark zusammenhängende Komponente von D bildet. Dann gelten folgende Eigenschaften.

- $dtw(D') = dtw(D)$
- $dw(D') = dw(D)$
- $cn_i(D') = cn_i(D)$ für $i \in \{1, 2\}$
- $dgw(D') = dgw(D)$

Beweis:

Mit Lemma 3.8.6 ist es möglich, sich auf den Fall zu beschränken, dass nur eine einzelne Kante unterteilt wird und genau ein Unterteilungsknoten v hinzugefügt wird. Die unterteilte Kante e verlaufe dabei von x nach y .

Da nach Voraussetzung der Knoten v eine einelementige stark zusammenhängende Komponente von D bildet, lässt sich folgende Partition der Knotenmenge $V(D)$ mit den entsprechend erzeugten Untergraphen aufstellen.

- $V_0 := V(D) \setminus V(D') = \{v\}$ bezeichnet die Menge der Unterteilungsknoten.
- $V_1 := \{u \in V(D) \mid \text{es existiert in } D \text{ ein Dipfad von } u \text{ nach } x\}$ bezeichnet die Menge aller Knoten in D , von denen der Knoten x erreichbar ist.
- $V_2 := V(D) \setminus (V_0 \cup V_1)$ bezeichnet die Menge der restlichen Knoten.
- Für jedes $i = 0, 1, 2$ sei $D_i := D[V_i]$.

Weil nun in D aber ein Dipfad von x über v nach y existiert, kann kein Dipfad von y nach x existieren. Ansonsten würde $\{v\}$ keine stark zusammenhängende Komponente von D mehr bilden.

Nun kann D als gerichtete Vereinigung $D = D_1 \vec{\cup} D_0 \vec{\cup} D_2$ dargestellt werden. Insbesondere ist auch D' als gerichtete Vereinigung $D' = D_1 \vec{\cup} D_2$ darstellbar. Weil alle zu untersuchenden Invarianten die Eigenschaft (**Union**) erfüllen, folgt mit Lemma 3.2.4 nun durch

$$inv(D) = \max\{\underbrace{inv(D_0)}_{\leq inv(K_d^1)}, \underbrace{inv(D_1)}_{\geq inv(K_d^1)}, \underbrace{inv(D_2)}_{\geq inv(K_d^1)}\} = \max\{inv(D_1), inv(D_2)\} = inv(D')$$

die gesuchte Aussage für alle zu untersuchenden Invarianten. \square

Leider ist es im Rahmen dieser Arbeit nicht gelungen die Eigenschaft (**Closed**) für die arboreale Weite im allgemeinen Fall zu beweisen oder zu widerlegen, da im Falle $G \preccurlyeq_r H$ die Konstruktion einer arborealen Zerlegung von G mit Hilfe einer gegebenen arborealen Zerlegung von H nur schwer möglich ist. Dies liegt darin begründet, dass die arborealen Zerlegungen eine Räuber-monotone Gewinnstrategie für das Räuber-und-Gendarmen-Spiel der Spielvariante I beschreiben. Nun muss bei der Konstruktion einer Zerlegung von G darauf geachtet werden, dass damit auch eine Räuber-monotone Gewinnstrategie für G beschrieben ist. Es ist jedoch anzunehmen, dass die arboreale Zerlegung von H geeignet gewählt werden kann, so dass eine Konstruktion möglich ist. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass der Teil von (**Closed**) bezüglich der arborealen Weite für \preccurlyeq_r erfüllt ist.

3.8.8 Vermutung:

Seien D und D' Digraphen und $D' \preccurlyeq_t D$, dann gilt $dtw(D') \leq dtw(D)$.

3.8.9 Satz:

Seien D und D' Digraphen und $D' \preccurlyeq_t D$, dann gilt $dw(D') \leq dw(D)$.

Beweis:

Mit Lemma 3.8.6 ist es möglich, sich auf den Fall zu beschränken, dass nur eine einzelne Kante unterteilt wird und genau ein Unterteilungsknoten v hinzugefügt wird. Die unterteilte Kante e verlaufe dabei von x nach y und es sei $V := \{x, y\}$.

Sei (T, X) eine D-Zerlegung von D mit Weite $dw(D)$, dann lässt sich ein geordnetes Paar (T, X') mit

$$X' := (X'_t)_{t \in V(T)} \quad \text{und} \quad X'_t := \begin{cases} X_t & , \text{für } v \notin X_t \\ X_t \setminus \{v\} \cup \{x\} & , \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $t \in V(T)$ definieren. Dabei erfüllt das geordnete Paar die Bedingung (C1) für eine D-Zerlegung von D' und es reicht nun die Bedingung (C2) zu überprüfen, um nachzuweisen, dass (T, X') eine D-Zerlegung von D' ist.

Sei nun $S \subseteq V(D')$ eine stark zusammenhängende Knotenmenge in D' , dann lassen sich die Mengen

$$V_S := \{t \in V(T) \mid S \cap X'_t \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad E_S := \{e = \{t_1, t_2\} \in E(T) \mid S \cap X'_{t_1} \cap X'_{t_2} \neq \emptyset\}$$

bilden.

Im Fall von $|S \cap V| \leq 1$ überträgt sich (C2) direkt von (T, X) auf (T, X') , da S auch in D stark zusammenhängend ist.

Im Fall von $V \subseteq S$ lassen sich $S' := S \cup \{v\}$ und die Mengen

$$V_{S'} := \{t \in V(T) \mid S' \cap X_t \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad E_{S'} := \{e = \{t_1, t_2\} \in E(T) \mid S' \cap X_{t_1} \cap X_{t_2} \neq \emptyset\}$$

bilden. Liegen x und y nicht in der gleichen stark zusammenhängenden Komponente von D , dann lässt sich der Satz 3.8.7 anwenden, der bereits die gesuchte Aussage liefert. Daher kann von nun an angenommen werden, dass x und y in der gleichen stark zusammenhängenden Komponente von D liegen.

Da S' in D stark zusammenhängend ist, bildet $(V_{S'}, E_{S'})$ nach (C2) für (T, X) einen zusammenhängenden Teilbaum von T . Dabei gilt aber $S' \cap X_t \neq \emptyset$ genau dann, wenn $S \cap X'_t \neq \emptyset$ erfüllt ist. Und es gilt $S' \cap X_{t_1} \cap X_{t_2} \neq \emptyset$ genau dann, wenn $S \cap X'_{t_1} \cap X'_{t_2} \neq \emptyset$ erfüllt ist.

Damit gelten $V_S = V_{S'}$ und $E_S = E_{S'}$ und (V_S, E_S) ist somit ein Teilbaum von T . Daher ist das geordnete Paar (T, X') eine D-Zerlegung von D' und es gilt $dw(D') \leq dw(D)$. \square

3.8.10 Satz:

Seien D und D' Digraphen und $D' \leq_t D$, dann gilt $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i \in \{1, 2\}$.

Beweis:

Mit Lemma 3.8.6 ist es möglich, sich auf den Fall zu beschränken, dass nur eine einzelne Kante unterteilt wird und genau ein Unterteilungsknoten v hinzugefügt wird. Die unterteilte Kante e verlaufe dabei von x nach y und es sei $V := \{x, y\}$.

Sei τ eine Gewinnstrategie auf D mit $k := cn_i(D)$ Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf D mit $i \in \{1, 2\}$ je nach verwendeter Spielvariante I oder II. Dabei wird beobachtet, dass die Unterteilung der Kante e das Spiel auf D' nur minimal verändert. Wird von der Spielstrategie τ für das Spiel auf D ausgegangen, so lässt sich auch das Spiel auf D' damit simulieren, in dem

es dem Räuber nicht erlaubt ist, den Unterteilungsknoten zu besetzen. Dabei verringern sich also die Fluchtmöglichkeiten des Räubers und τ bleibt weiterhin eine Gewinnstrategie. Allerdings ist es auch für die Gendarmen nun unnötig, die Unterteilungsknoten zu besetzen, da diese niemals vom Räuber besetzt werden können. Stattdessen besetzen die Gendarmen den Knoten x , da dieser ausreicht, um die Flucht entlang des Unterteilungsknoten zu verhindern. Damit ist eine Gewinnstrategie τ' für D' formuliert und es gilt $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i \in \{1, 2\}$. \square

Die folgende Vermutung wird im Beweis zum nachfolgenden Satz 3.8.12 verwendet. Bisher ist es nicht gelungen diese zu beweisen oder durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

3.8.11 Vermutung:

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph, $v, x, y \in V(D)$ und $e_1, e_2 \in E(D)$ mit $\mu(e_1) = (x, v)$ und $\mu(e_2) = (v, y)$ sowie $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v) = 1$.

Dann existiert eine DAG-Zerlegung (G, X) mit Weite $\text{dgw}(D)$ so, dass für alle $d_1, d_2, d_3 \in V(G)$ mit $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ die folgende Bedingung gilt.

Sei $v \in X_{d_1}$ und $y \in X_{d_3}$, dann ist entweder v oder y in X_{d_2} enthalten.

3.8.12 Satz:

Seien D und D' Digraphen und $D' \leq_t D$, dann gilt unter Voraussetzung der Richtigkeit der Vermutung 3.8.11 die Beziehung $\text{dgw}(D') \leq \text{dgw}(D)$.

Beweis:

Mit Lemma 3.8.6 ist es möglich, sich auf den Fall zu beschränken, dass nur eine einzelne Kante unterteilt wird und genau ein Unterteilungsknoten v hinzugefügt wird. Die unterteilte Kante e verlaufe dabei von x nach y und es sei $V := \{x, y\}$.

Sei (G, X) eine DAG-Zerlegung von D mit Weite $\text{dtw}(D)$. Setze

$$X' := (X'_d)_{d \in V(G)} \quad \text{mit} \quad X'_d := \begin{cases} X_d & , \text{für } v \notin X_d \\ X_d \cup \{y\} & , \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $d \in V(G)$. Durch das Hinzufügen von y zu allen Mengen X_d , welche v enthalten, bleibt die Bedingung **(D1)** weiterhin erfüllt und es reicht, für (G, X') die Bedingungen **(D2)** und **(D3)** zu überprüfen.

Angenommen **(D2)** ist für (G, X') nicht mehr erfüllt, dann gibt es ein $(d, d') \in E(G)$, so dass folgende Aussagen zutreffen.

- (i) $(X_{d'} \cap X_d)$ bewacht $(X_{\geq d'} \setminus X_d)$ in D
- (ii) $(X'_{d'} \cap X'_d)$ bewacht $(X_{\geq d'} \setminus X_d)$ in D
- (iii) $(X'_{d'} \cap X'_d)$ bewacht nicht mehr $(X'_{\geq d'} \setminus X'_d)$ in D

Dabei gilt (i) bereits wegen **(D2)** für die DAG-Zerlegung (G, X) und (ii) ist damit automatisch erfüllt. Wegen (iii) folgt nun $(X'_{\geq d'} \setminus X'_d) \neq (X_{\geq d'} \setminus X_d)$. In diesem Fall wurde beim Übergang von X zu X' die Menge $(X'_{\geq d'} \setminus X'_d)$ um den Knoten y angereichert. Das bedeutet aber, dass v in $(X_{\geq d'} \setminus X_d)$ enthalten war und y nicht.

Wegen (i) muss allerdings y in $(X_{d'} \cap X_d)$ enthalten sein, da sonst ein unbewachter Dipfad von v nach y existiert. Dann wurden beim Übergang von X nach X' aber auch die Mengen $X'_{\geq d'}$ und X'_d

um y angereichert. Dies steht allerdings im Widerspruch zur Folgerung aus (iii), dass y nicht in $(X'_{\geq d'} \setminus X'_q)$ enthalten ist. Damit ist auch **(D2)** für (G, X') erfüllt.

Angenommen **(D3)** ist nicht für (D, X') erfüllt, dann existieren $d_1, d_2, d_3 \in V(G)$ mit $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ und

- (i) $X_{d_1} \cap X_{d_3} \subseteq X_{d_2}$,
- (ii) $X'_{d_1} \cap X'_{d_3} \not\subseteq X'_{d_2}$.

Dabei gilt (i) bereits wegen **(D3)** für die DAG-Zerlegung (G, X) . O.B.d.A. sei $(d_2, d_3) \in E(G)$. Wegen (ii) folgt $(X_{d_1} \cap X_{d_3}) \neq (X'_{d_1} \cap X'_{d_3})$. In diesem Fall wurde beim Übergang von X zu X' die Menge $X'_{d_1} \cap X'_{d_3}$ um y angereichert. Weiterhin enthält X'_{d_2} und somit auch X_{d_2} weder y noch v . Dies bedeutet, dass einer der folgenden drei Fälle eingetreten sein muss.

- Es ist v in $(X_{d_1} \cap X_{d_3})$ enthalten. Wegen (i) folgt damit aber, dass v auch in X_{d_2} enthalten ist. Dies steht allerdings im Widerspruch zur obigen Folgerung aus (ii), dass v nicht in X_{d_2} enthalten ist.
- Es ist v nur in X_{d_3} und y nur in X_{d_1} enthalten. Wegen **(D2)** für (G, X) wird die Menge $(X_{\geq d_3} \setminus X_{d_2})$ von $(X_{d_2} \cap X_{d_3})$ bewacht. Dabei enthält $X_{\geq d_3}$ nicht den Knoten y , weil sonst **(D3)** für (G, X) verletzt würde. Weil v aber in $(X_{\geq d_3} \setminus X_{d_2})$ enthalten ist, muss y in $(X_{d_2} \cap X_{d_3})$ enthalten sein, da sonst ein unbewachter Dipfad von v nach y existiert.

Dies steht allerdings im Widerspruch dazu, dass y nur in X_{d_1} und nicht in X_{d_2} bzw. X_{d_3} enthalten ist.

- Es ist v nur in X_{d_1} und y nur in X_{d_3} enthalten. Unter Voraussetzung der Richtigkeit der Vermutung 3.8.11 ist die DAG-Zerlegung (G, X) von D so wählbar, dass dieser Fall nicht eintritt.

Somit ist (G, X') eine DAG-Zerlegung von D mit Weite $\leq \text{dgw}(D)+1$. Setze nun $X'' := (X''_d)_{d \in V(G)}$ mit $X''_d := X'_d \setminus \{v\}$. Dann sind für (G, X'') die Bedingungen **(D1)**, **(D2)** und **(D3)** auf D' erfüllt und (G, X'') ist somit eine DAG-Zerlegung von D' mit Weite $\text{dgw}(D)$. \square

Ein Gegenbeispiel für die Vermutung 3.8.11 könnte allerdings auch zur Konstruktion eines Gegenbeispiels für Satz 3.8.12 genutzt werden. In nachfolgenden Arbeiten gilt es, diese Vermutung näher zu untersuchen oder eine andere Konstruktion für den Beweis von Satz 3.8.12 zu nutzen.

Damit bilden die topologischen Minoren eine Grundlage für eine eingeschränkte Minorenrelation, die es allerdings noch möglichst umfangreich zu erweitern gilt, ohne dass die Eigenschaften **(DAG)** und **(Closed)** verloren gehen.

3.8.3 Die Minorenrelation auf Digraphen nach JRST \leq_{JRST}

In [15] wurde die erste Definition einer eingeschränkten Minorenrelation auf der Menge der Digraphen vorgestellt. Dabei wurden die Kantenkontraktionen auf Kanten eines bestimmten Typs eingeschränkt.

Definition: (kontrahierbare Kante; vgl. [15])

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph. Eine Kante e ist genau dann *kontrahierbar*, wenn keine weitere Kante existiert, welche den gleichen Endknoten wie e oder den gleichen Anfangsknoten wie e oder beides besitzt.

Eine Kante e mit $\mu(e) = (u, v)$ ist also genau dann kontrahierbar, wenn $\text{outdeg}(u) = 1$ oder $\text{indeg}(v) = 1$ oder beides gilt.

Definition: (Minor nach [15], Minorenrelation, \preccurlyeq_{JST} ; vgl. [15])

Seien G und H Digraphen. Dann ist G genau dann ein Minor nach [15] von H , wenn ein Teilgraph H' von H so existiert, dass durch Kontraktion von kontrahierbaren Kanten aus H' der Graph G resultiert.

Die Beziehung „ G ist Minor von H “ beschreibt dabei eine Quasiordnung (reflexiv und transitiv) auf der Menge der Digraphen. Diese wird hier als *Minorenrelation* \preccurlyeq_{JST} bezeichnet.

Diese abgeschwächte Form der Minorenrelation wurde in [15] vorgeschlagen, da von den Autoren vermutet wurde, dass diese mit der vorgeschlagenen Definition der arboresalen Weite eines Digraphen D verträglich ist und somit die Bedingung (**Closed**) erfüllt. Dies wurde allerdings von Isolde Adler in ihrer Arbeit [1] durch die Angabe eines Gegenbeispiels widerlegt.

3.8.13 Proposition: (vgl. Korollar 19 in [1])

Der Digraph D^2 (siehe Abbildung 3.8) ist ein Minor von D^3 (siehe Abbildung 3.18) unter \preccurlyeq_{JST} und es gilt $\text{dtw}(D^3) \leq 3 < \text{dtw}(D^2)$.

Das heißt, die Minorenrelation \preccurlyeq_{JST} erfüllt (**Closed**) nicht für die arboresale Weite.

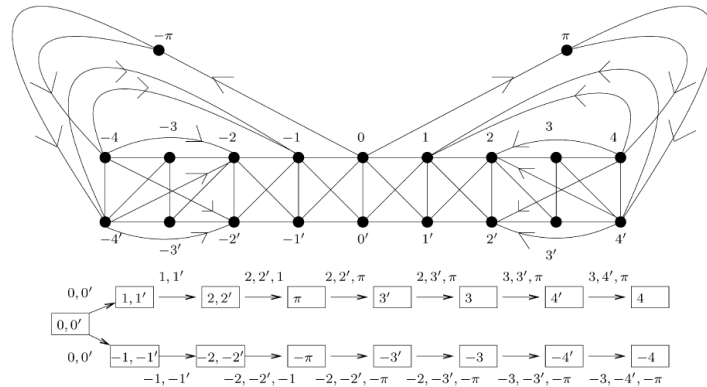


Abbildung 3.18: der Digraph D^3 und einer arboresalen Zerlegung mit $\text{dtw}(D^3) \leq 3$ (aus [1])

Allerdings erfüllt diese eingeschränkte Minorenrelation die Bedingung (**DAG**).

3.8.14 Lemma:

Die eingeschränkte Minorenrelation \preccurlyeq_{JST} auf Digraphen erfüllt die Bedingung (**DAG**).

Beweis:

Angenommen \preccurlyeq_{JST} erfüllt (**DAG**) nicht, dann existiert ein Digraph $D = (V, E, \mu)$ ohne Zyklus der Länge ≥ 2 und durch Kontraktion einer kontrahierbaren Kante $e \in E(D)$ entsteht ein Digraph D' mit einem Zyklus der Länge ≥ 2 . Da dieser Zyklus nicht in D enthalten war, muss die Kontraktion von e den Anfangs- und Endknoten eines Dipfades zusammengeführt und somit den Zyklus geschlossen haben. Das heißt aber, in D gab es einen Dipfad P von u nach v der Länge ≥ 2 . Damit existieren allerdings mit e und dem Dipfad P mindestens zwei Kanten mit u als Anfangsknoten und mindestens zwei Kanten mit v als Endknoten. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass e eine kontrahierbare Kante war. \square

Aufgrund des Gegenbeweises ist anzunehmen, dass auch die anderen Invarianten wie die D-Weite, die DAG-Weite und die Gendarmenzahlen in den beiden Spielvarianten I und II unter \leq_{JRS} nicht mehr die Bedingung (**Closed**) erfüllen. In dieser Arbeit konnte dies bisher weder bewiesen noch widerlegt werden und stellt ein offenes Problem für weiterführende Forschung dar.

In [15] wurde von den Autoren allerdings auch eine Charakterisierung der Digraphen mit beschränkter arborealer Weite vorgeschlagen.

Definition: (J_k ; vgl. [15])

Für $k \in \mathbb{N}$ besteht der Digraph J_k aus k gerichteten Zyklen C_1, \dots, C_k und $2k$ disjunkten Dipfaden $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k$. Für $i = 1, \dots, k$ gilt dabei:

- C_i besitzt die Knotenmenge $u_{i,1}, \dots, u_{i,k}, v_{i,1}, \dots, v_{i,k}$ (in dieser Reihenfolge).
- P_i besitzt die Knotenmenge $u_{1,i}, \dots, u_{k,i}$ (in dieser Reihenfolge).
- Q_i besitzt die Knotenmenge $v_{k,i}, \dots, v_{1,i}$ (in dieser Reihenfolge).

Damit kann J_k so in die Ebene gezeichnet werden, dass die Zyklen C_1, \dots, C_k als konzentrische Kreise (entsprechend der Reihenfolge der Auflistung) dargestellt werden. Die disjunkten Dipfade P_1, \dots, P_k verbinden dabei C_1, \dots, C_k (in der Reihenfolge) und die disjunkten Dipfade Q_1, \dots, Q_k verbinden C_k, \dots, C_1 (in der Reihenfolge).

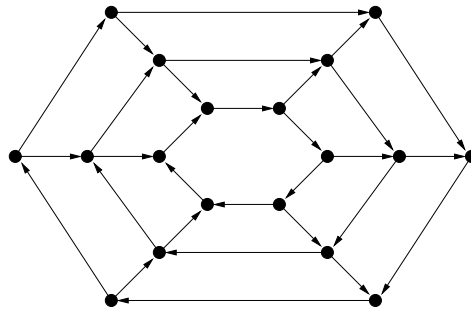


Abbildung 3.19: planare Darstellung des Digraphen J_3 als Beispiel für J_k (aus [15])

Der Vorschlag zur Charakterisierung beschränkter arborealer Weite lautet damit wie folgt.

3.8.15 Vermutung: (vgl. Vermutung 5.1 in [15])

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_k \in \mathbb{N}$, so dass jeder Digraph mit arborealer Weite von mindestens N_k einen Minoranten besitzt, welcher zu J_k isomorph ist.

In [15] boten die Autoren einige Ansätze, wie diese Vermutung bewiesen werden könnte. Allerdings beruhten diese Ansätze zum Teil auf inzwischen widerlegten Annahmen. Im Rahmen dieser Arbeit konnte diese Vermutung ebenfalls weder bewiesen noch widerlegt werden und stellt weiterhin ein offenes Problem für weiterführende Forschung dar.

3.8.4 Eingeschränkte Minorenrelationen \leq_1, \leq_2, \leq_3

In diesem Abschnitt werden drei neue Varianten einer eingeschränkten Minorenrelation vorgestellt, welche im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind. Dabei dient die Teilgraphenrelation beziehungsweise die topologische Minorenrelation für Digraphen als Grundlage und wird systematisch erweitert.

Eine besonderes Verhalten der betrachteten Invarianten ist bei der azyklischen Kondensation zu beobachten.

Definition: (azyklische Kondensation; vgl.)

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Digraph und $S = (S_i)_{i=1, \dots, n}$ eine Partition der Knotenmenge $V(D)$ in die eindeutig definierten Knotenmengen der stark zusammenhängenden Komponenten von D . Dann ist die azyklische Kondensation $A = (V', E, \mu')$ definiert durch

- $V' := \{v_1, \dots, v_n\}$
- $E' := \left\{ e \in E \mid \exists S_i, S_j \in S \text{ verschieden mit } x \in S_i, y \in S_j \text{ und } \mu(e) = (x, y) \right\}$
- $\mu'(e) = (v_i, v_j)$ für alle $e \in E'$ mit $x \in S_i, y \in S_j$ und $\mu(e) = (x, y)$.

Dies entspricht der Kontraktion aller Kanten innerhalb der stark zusammenhängenden Komponenten, wobei die Kontraktion einer Schlinge mit der Löschung der Schlinge vergleichbar ist.

Dabei ist A in jedem Fall ein azyklischer Digraph, denn jede stark zusammenhängende Knotenmenge ist in A einelementig.

3.8.16 Lemma:

Jeder Digraph D lässt sich als eine gerichtete Vereinigung seiner stark zusammenhängenden Komponenten darstellen.

Beweis:

Sei D ein Digraph und $V_1 \subseteq V(D)$ die Knotenmengen einer stark zusammenhängenden Komponente aus D , so dass für alle Kanten aus $E(D)$ mit Endknoten in V_1 auch der Anfangsknoten in V_1 enthalten ist. Setze nun $V_2 := V(D) \setminus V_1$.

Dann ist D als gerichtete Vereinigung $D[V_1] \vec{\cup} D[V_2]$ darstellbar.

Eine solche Knotenmenge V_1 existiert für jeden Digraphen D , denn die azyklische Kondensation A von D ist ein DAG und nach Lemma 1.1.2 existiert in A ein initialer Knoten v_i . Das heißt aber, dass die Knotenmenge der dazugehörigen stark zusammenhängenden Komponente S_i in D die Anforderungen für V_1 erfüllt. \square

Offensichtlich sind die arboreale Weite, D-Weite, DAG-Weite und die Gendarmenzahlen für die Spielvarianten I und II nur von den stark zusammenhängenden Komponenten des Digraphen abhängig.

3.8.17 Lemma:

Sei D ein Digraph und $S = (S_j)_{j=1, \dots, n}$ die Partition der Knotenmenge $V(D)$ in die Knotenmengen der stark zusammenhängenden Komponenten von $V(D)$. Dann gelten folgende Eigenschaften.

- $dtw(D) = \max \left\{ dtw(S_j) \mid j = 1, \dots, n \right\}$
- $dw(D) = \max \left\{ dw(S_j) \mid j = 1, \dots, n \right\}$
- $cn_i(D) = \max \left\{ cn_i(S_j) \mid j = 1, \dots, n \right\}$ für $i \in \{1, 2\}$
- $dgw(D) = \max \left\{ dgw(S_j) \mid j = 1, \dots, n \right\}$

Beweis:

Für alle angegebenen Invarianten ist der Beweis analog zu führen. So repräsentiert nachfolgend inv jeweils die betrachteten Invarianten.

Wegen Lemma 3.8.16 ist der Digraph D als gerichtete Vereinigung seiner stark zusammenhängenden Komponenten darstellbar. O.B.d.A. liegt die Partition $S = (S_j)_{j=1,\dots,n}$ bereits in der Form vor, dass D als gerichtete Vereinigung in der Form $D[S_1] \vec{\cup} D[S_2] \vec{\cup} \dots \vec{\cup} D[S_n]$ dargestellt werden kann. Dann folgt direkt die gewünschte Aussage mit

$$\begin{aligned} inv(D) &= \max \{ inv(D[S_1]), inv(D - S_1) \} \\ &= \max \{ inv(D[S_1]), inv(D[S_2]), inv(D - S_1 - S_2) \} \\ &= \dots = \max \{ inv(D[S_j]) \mid j = 1, \dots, n \} . \end{aligned} \quad \square$$

Die azyklische Kondensation A eines Digraphen D ist ein wichtiges Hilfsmittel, denn durch die azyklische Struktur sind die Invarianten für A bereits bekannt. Durch Lemma 3.8.17 wird allerdings auch deutlich, dass die Kontraktion einer einzelnen stark zusammenhängenden Komponente mit (**Closed**) verträglich ist.

3.8.18 Satz:

Sei D ein Digraph und $S = (S_j)_{j=1,\dots,n}$ die Partition der Knotenmenge $V(D)$ in die Knotenmengen der stark zusammenhängenden Komponenten von $V(D)$. Sei nun $S_i \in S$ die Knotenmenge einer stark zusammenhängenden Komponente von D und $E \subseteq E(D[S_i])$ eine Menge von Kanten innerhalb von S_i , so dass $D[S_i]/E$ nur einen einzigen Knoten mit eventuell vorhandenen Schlingen besitzt.

Für den Digraphen $D' := D/E$ welcher durch Kontraktion der Kanten in E entsteht, gelten dann folgende Eigenschaften.

- $dtw(D') \leq dtw(D)$
- $dw(D') \leq dw(D)$
- $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i \in \{1, 2\}$
- $dgw(D') \leq dgw(D)$

Beweis:

Für alle angegebenen Invarianten ist der Beweis analog zu führen. So repräsentiert nachfolgend inv jeweils die betrachteten Invarianten.

Wegen Lemma 3.8.17 gilt für den Digraphen D bereits $inv(D) = \max \{ inv(D[S_j]) \mid j = 1, \dots, n \}$. Weil $D[S_i]/E$ genau einen Knoten enthält, gilt zudem $inv(D[S_i]/E) = inv(K_d^1) \leq inv(D[S_i])$. Daher folgt mit

$$\begin{aligned} inv(D) &= \max \{ inv(D[S_j]) \mid j = 1, \dots, n \} \\ &= \max \{ \max \{ inv(D[S_j]) \mid j = 1, \dots, n; j \neq i \}, inv(D[S_i]) \} \\ &\geq \max \{ \max \{ inv(D[S_j]) \mid j = 1, \dots, n; j \neq i \}, inv(K_d^1) \} = inv(D') \end{aligned}$$

die gewünschte Aussage. □

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Kontraktion von wechselseitig orientierten Kantenpaaren zuzulassen. Die Kontraktion der Kanten eines Graphen G entspricht somit der Kontraktion eines wechselseitig orientierten Kantenpaares in $D(G)$. Nachfolgend wird diese Form der Kantenkontraktion für beliebige Digraphen untersucht.

3.8.19 Satz:

Seien D und D' Digraphen und $D' = D/E$, wobei $E := \{e_1, e_2\} \subseteq E(D)$ in D ein wechselseitig orientiertes Kantenpaar bildet. Dann gilt $dw(D') \leq dw(D)$.

Beweis:

Bei der Kontraktion D/E wird an Stelle der Knoten $x, y \in V(D)$, welche mit e_1 und e_2 inzidieren, ein neuer Knoten hinzugefügt, der nachfolgend mit v bezeichnet wird. Dabei sei $V := \{x, y\}$. Sei (T, X) eine D-Zerlegung von D mit Weite $dw(D)$.

Setze (T, X') mit $X' := (X'_t)_{t \in V(T)}$ und

$$X'_t := \begin{cases} X_t \setminus V \cup \{v\} & , \text{ falls } X_t \cap V \neq \emptyset \\ X_t & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $t \in V(T)$. Dabei ist X' wiederum eine Partition von $V(D')$ und erfüllt somit **(C1)** auf D' .

Sei nun $S \subseteq V(D')$ eine stark zusammenhängende Menge in D' , dann lassen sich die Mengen $V_S := \{t \in V(T) \mid S \cap X'_t \neq \emptyset\}$ und $E_S := \{e = (t_1, t_2) \in E(T) \mid S \cap X'_{t_1} \cap X'_{t_2} \neq \emptyset\}$ bilden.

Enthält S nicht den neuen Knoten v , dann ist S auch in D enthalten und dort ebenfalls stark zusammenhängend. Nach **(C2)** für (T, X) auf D bildet (V_S, E_S) einen zusammenhängenden Teilbaum von T . Damit ist die Bedingung **(C2)** auch für (T, X') auf D' erfüllt.

Ist v in S enthalten, dann ist $S' := S \setminus \{v\} \cup V$ eine stark zusammenhängende Knotenmenge in D . Dabei folgt für alle $t \in V(T)$ aus $S' \cap X_t \neq \emptyset$ stets $S \cap X'_t \neq \emptyset$. Für $t_1, t_2 \in V(T)$ mit $\{t_1, t_2\} \in E(T)$ folgt aus $S' \cap X_{t_1} \cap X_{t_2} \neq \emptyset$ stets $S \cap X'_{t_1} \cap X'_{t_2} \neq \emptyset$.

Des weiteren lassen sich an dieser Stelle die Mengen $V_{S'} := \{t \in V(T) \mid S' \cap X_t \neq \emptyset\}$ und $E_{S'} := \{e = (t_1, t_2) \in E(T) \mid S' \cap X_{t_1} \cap X_{t_2} \neq \emptyset\}$ bilden, wobei $V_S = V_{S'}$ und $E_S = E_{S'}$ gilt. Wegen **(C2)** für (T, X) auf D bildet $(V_{S'}, E_{S'})$ und so auch (V_S, E_S) einen zusammenhängenden Teilbaum von T .

Damit ist (T, X') eine D-Zerlegung von D' mit Weite $dw(D)$ und es gilt $dw(D') \leq dw(D)$. \square

3.8.20 Satz:

Seien D und D' Digraphen und $D' = D/E$, wobei $E := \{e_1, e_2\} \subseteq E(D)$ in D ein wechselseitig orientiertes Kantenpaar bildet. Dann gilt $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i = 1, 2$.

Beweis:

Bei der Kontraktion D/E wird an Stelle der Knoten $x, y \in V(D)$, welche mit e_1 und e_2 inzidieren, ein neuer Knoten hinzugefügt, der nachfolgend mit v bezeichnet wird. Für beide Spielvarianten ist der Beweis in gleicher Form führbar, daher kann $i \in \{1, 2\}$ entsprechend der Spielvariante I oder II frei gewählt werden.

Sei τ eine Gewinnstrategie für $k := cn_i(D)$ Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf D . Um eine Gewinnstrategie für das Spiel auf D' zu finden, sind einige Betrachtungen hilfreich.

Zunächst wird beobachtet, dass die Besetzung des Knotens v durch die Gendarmen im Spiel auf D' einer Besetzung von x und y im Spiel auf D entspricht. Die Besetzung von v durch den Räuber im Spiel auf D' entspricht einer Besetzung von x und y . Wenn die Gendarmen keinen der beiden Knoten besetzen, ist es dem Räuber bereits jederzeit möglich, von x nach y und umgekehrt zu flüchten. Demzufolge ergeben sich für den Räuber keine neuen Fluchtmöglichkeiten, während das Spiel für die Gendarmen unter Umständen leichter wird.

Damit ergibt sich die Existenz einer Gewinnstrategie τ' für k Gendarmen im Spiel auf D' . Daraus folgt bereits die gewünschte Aussage $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i = 1, 2$. \square

Die Untersuchung der arborealen Weite und DAG-Weite konnte in dieser Arbeit bisher keine Aussage getroffen werden. Die Verbindungen dieser Invarianten zu Gendarmen-monotonen Gewinnstrategien erschweren dabei eine Konstruktion geeigneter Gewinnstrategien für den resultierenden Digraphen nach Kontraktion eines wechselseitig orientierten Kantenpaares. So bietet die nachfolgende Vermutung 3.8.21 eine Grundlage weiterführender Forschung auf diesem Gebiet.

3.8.21 Vermutung:

Seien D und D' Digraphen und $D' = D / \{e_1, e_2\}$, wobei $e_1, e_2 \in E(D)$ in D ein wechselseitig orientiertes Kantenpaar bilden. Dann gilt

- $dtw(D') \leq dtw(D)$
- $dgw(D') \leq dgw(D)$.

Für die D-Weite und die Gendarmenzahlen der Spielvarianten I und II lassen sich allerdings sogar Verallgemeinerungen der Sätze 3.8.19 und 3.8.20 formulieren und beweisen. Dabei wird die Kontraktion einer stark zusammenhängende Knotenmenge betrachtet. Die bereits betrachtete Kontraktion einer stark zusammenhängenden Komponente und die Kontraktion eines wechselseitig orientierten Kantenpaares sind dabei Spezialfälle dieser Verallgemeinerung.

3.8.22 Satz:

Seien D und D' Digraphen und $D' = D/E$ mit $E \subseteq E(D)$, sowie $V := \{v \in V(D) \mid \exists e \in E : v \sim e\}$. Sei außerdem $D[V]$ stark zusammenhängend und besitzt $D[V]/E$ nur einen einzigen Knoten. Dann gilt $dw(D') \leq dw(D)$.

Beweis:

Der Beweis ist vollkommen analog zum Beweis von Satz 3.8.19 zu führen, dabei wurde bereits die gleiche Notation wie für diesen Satz gewählt und es sei daher an dieser Stelle auf den Beweis von Satz 3.8.19 verwiesen. \square

3.8.23 Satz:

Seien D und D' Digraphen und $D' = D/E$ mit $E \subseteq E(D)$, sowie $V := \{v \in V(D) \mid \exists e \in E : v \sim e\}$. Sei außerdem $D[V]$ stark zusammenhängend und besitzt $D[V]/E$ nur einen einzigen Knoten. Dann gilt $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i = 1, 2$.

Beweis:

Die Beweisidee von Satz 3.8.20 ist auf diesen Fall verallgemeinerbar und für beide Spielvarianten ist der Beweis in gleicher Form führbar. Daher kann $i \in \{1, 2\}$ entsprechend der Spielvariante I oder II frei gewählt werden.

Sei τ eine Gewinnstrategie für $k := cn_i(D)$ Gendarmen im Räuber-und-Gendarmen-Spiel auf D . Um eine Gewinnstrategie für das Spiel auf D' zu finden, sind einige Betrachtungen hilfreich.

Zunächst wird beobachtet, dass die Besetzung des Knotens v durch die Gendarmen im Spiel auf D' einer Besetzung aller Knoten aus V im Spiel auf D entspricht. Die Besetzung von v durch den Räuber im Spiel auf D' entspricht einer Besetzung aller Knoten aus V . Wenn die Gendarmen keinen der beiden Knoten besetzen, ist es dem Räuber bereits jederzeit möglich, sich frei in der

stark zusammenhängenden Knotenmenge V zu bewegen und gegebenenfalls zu flüchten. Demzufolge ergeben sich für den Räuber keine neuen Fluchtmöglichkeiten, während das Spiel für die Gendarmen unter Umständen leichter wird.

Damit ergibt sich die Existenz einer Gewinnstrategie τ' für k Gendarmen im Spiel auf D' . Daraus folgt bereits die gewünschte Aussage $cn_i(D') \leq cn_i(D)$ für $i = 1, 2$. \square

Analog zur Vermutung 3.8.21 gilt es als ungewiss, ob im Falle der Richtigkeit dieser Vermutung, auch eine Verallgemeinerung auf die Kontraktion stark zusammenhängender Knotenmengen möglich ist.

3.8.24 Vermutung:

Seien D und D' Digraphen und $D' = D/E$ mit $E \subseteq E(D)$, wobei $V := \{v \in V(D) \mid \exists e \in E : v \sim e\}$ in D stark zusammenhängend ist. Dann gilt

- $dtw(D') \leq dtw(D)$
- $dgw(D') \leq dgw(D)$.

Auf Grundlage der durchgeführten Betrachtungen ist es nun möglich einige Einschränkungen an die Minorenrelation \leq für Digraphen zu formulieren.

Definition: (eingeschränkte Minorenrelation, \leq_1, \leq_2, \leq_3)

Die eingeschränkten Minorenrelationen \leq_i (für $i \in \{1, 2, 3\}$) auf der Menge der Digraphen sind wie folgt definiert.

Seien G und H Digraphen. Dann ist G genau dann ein *Minor* von H unter \leq_i , wenn ein Teilgraph H' von H in der Weise existiert, dass durch folgende Formen der Kantenkontraktion (für jeweiliges $i \in \{1, 2, 3\}$) aus H' der Digraph G resultiert.

- $i = 1$: Kontraktionen von stark zusammenhängenden Komponenten
- $i = 2$: Kontraktionen von stark zusammenhängenden Komponenten und Unterteilungen
- $i = 3$: Kontraktionen von stark zusammenhängenden Knotenmengen und Unterteilungen

Dabei stellen die vorgestellten eingeschränkten Minorenrelationen eine systematische Anreicherung der Teilgraphenrelation bzw. eine systematische Einschränkung der (gewöhnlichen) Minorenrelation für Digraphen dar. Dabei ist bekannt, dass alle \leq_i für $i = 1, 2, 3$ die Anforderung (**DAG**) erfüllen. Die Anforderung (**Closed**) konnte in dieser Arbeit nur für \leq_1 bewiesen werden. Ist es bei weiterführender Forschung möglich die formulierten Vermutungen 3.8.8 und 3.8.11 zu belegen, wäre damit (**Closed**) auch für \leq_2 erfüllt. Für die D-Weite und die Gendarmenzahlen für die Spielvarianten I und II sind die entsprechenden Aussagen von (**Closed**) selbst für \leq_3 noch erfüllt.

Die Minorenrelation $\leq_{JRS T}$ stellt dabei eine Anreicherung der topologischen Minorenrelation \leq_t dar, denn jede Kante einer Unterteilung durch einen Dipfad der Länge ≥ 2 ist auch eine kontrahierbare Kante.

4 Verbindungen zwischen Reduzibilität und Minoren von Digraphen

In diesem Kapitel werden die gewonnenen Erkenntnisse über Minoren von Digraphen auf die reduzierbaren Wurzeldigraphen angewandt. Allerdings ist gerade die Formulierung der Kantenkontraktion T_2 etwas problematisch, weil die Kontraktion einer Kante zum Wurzelknoten unzulässig ist. Um die Transformation T_2 unabhängig vom Wurzelknoten zu beschreiben, sind zunächst einige Betrachtungen notwendig.

4.1 Reduzibilität und initiale Wurzeldigraphen

Definition: (*initialisierter Wurzeldigraph*)

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Wurzeldigraph mit Wurzelknoten $r \in V$. Der *initialisierte Wurzeldigraph* $I_0(D) = (V', E', \mu')$ ist dann wie folgt definiert.

- $V' := V(D) \cup \{ r_0 \}$
- $E' := E(D) \cup \{ e_0 \}$
- $\mu'(e) = \begin{cases} \mu(e) & , \text{ falls } e \in E \\ (r_0, r) & , \text{ falls } e = e_0 \end{cases}$

Die Abbildung 4.1 veranschaulicht diese Konstruktion.

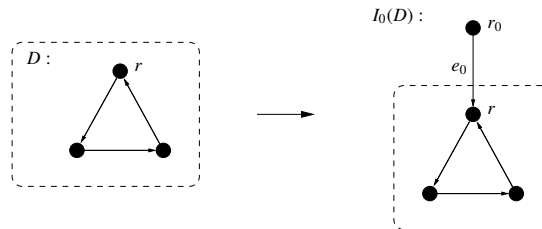


Abbildung 4.1: Konstruktionsschema für die Initialisierung $I_0(D)$ eines Wurzeldigraphen D mit Wurzelknoten r

Auf dieser Grundlage lässt sich eine Verbindung zwischen reduzierbaren Wurzeldigraphen und den spezielleren initialen Wurzeldigraphen herstellen. Dabei ist zu bemerken, dass initiale Wurzeldigraphen zwar bereits einen initialen Wurzelknoten besitzen, aber als Teilmenge der Wurzeldigraphen ebenfalls initialisiert werden können.

4.1.1 Lemma:

Ein Wurzeldigraph D ist genau dann reduzibel, wenn der initialisierte Wurzeldigraph $I_0(D)$ reduzibel ist.

Beweis:

Angenommen $I_0(D)$ ist nicht reduzibel, obwohl D reduzibel ist. Dann existiert allerdings eine Reduktionsfolge für D . Dabei sind alle Transformationen auch auf $I_0(D)$ anwendbar. Auf diese Weise wird der gesamte Teilgraph von $I_0(D)$, welcher D entspricht, auf einen Knoten reduziert. Wird nun T_2 auf die letzte Kante e_0 angewendet, resultiert ein Wurzeldigraph, welcher zum K_d^1 isomorph ist. Damit ist eine Reduktionsfolge für $I_0(D)$ beschrieben und $I_0(D)$ somit ebenfalls reduzibel.

Angenommen $I_0(D)$ ist reduzibel, obwohl D irreduzibel ist. Nach Satz 1.2.3 enthält damit D einen Teilgraphen D' , welcher zu einem Wurzeldigraph $R \in \mathcal{R}$ isomorph ist. Dabei ist D aber selbst Teilgraph von $I_0(D)$ und es gilt $R \cong D' \subseteq D \subseteq I_0(D)$, wobei nach Satz 1.2.3 nun auch $I_0(D)$ irreduzibel ist. \square

Des Weiteren lässt sich etwas über die Reduktionsfolgen von initialen Wurzeldigraphen aussagen.

4.1.2 Lemma:

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein reduzibler initialer Wurzeldigraph und $(D_i)_{i=0, \dots, |E|}$ eine Reduktionsfolge. Dann ist jeder Digraph D_i der Reduktionsfolge ebenfalls ein initialer Wurzeldigraph.

Beweis:

Offensichtlich erhält die Löschung einer Schlinge und somit die Transformation T_1 die Eigenschaften des initialen Wurzelknotens. Somit reicht es zu zeigen, dass die Anwendung der Transformation T_2 die Existenz eines initialen Wurzelknotens erhält.

Angenommen T_2 würde dies nicht tun. Dann gibt es ein $i = 1, \dots, |E(D)|$ mit $D_i = T_2(D_{i-1}, e)$, so dass D_i keinen initialen Wurzelknoten besitzt, obwohl D_{i-1} zuvor den initialen Wurzelknoten r besaß. Dabei sei $v_e \in V(D_i)$ der Knoten, welcher bei der Kontraktion von e entsteht. Die einzige Möglichkeit, besteht nun darin, dass r mit der Kante e inzidierte. Da aber r initial war, muss r der Anfangsknoten von e sein und $v \neq r$ sei der Endknoten von e . Dann gilt

$$in_{D_i}(v_e) = |IN_{D_{i-1}}(r) \cup (IN_{D_{i-1}}(v) \setminus \{r\})| = in_{D_{i-1}}(v) - 1 = 0$$

und v_e ist wiederum ein initialer Knoten. Weil sich die Eigenschaften des Wurzelknotens r direkt auf v_e übertragen, ist somit D_i ein initialer Wurzeldigraph mit Wurzelknoten v_e . Dies steht im Widerspruch zur Annahme und es folgt die Aussage des Lemmas. \square

Aus diesem Lemma lässt sich schließlich eine etwas vereinfachte Formulierung der Reduzibilität auf der Menge der Digraphen gewinnen.

4.1.3 Satz:

Ein initialer Wurzeldigraph D ist genau dann reduzibel, wenn er durch wiederholte Anwendung der Transformationen T_1 und T_2' zu einem Digraphen isomorph zum K_d^1 umgeformt werden kann. Dabei sind die Transformationen wie folgt beschrieben.

T_1 : Löschung der Schlinge e und somit $T_1(D, e) := D - e$.

Diese Transformation ist nur dann anwendbar, falls e eine Schlinge von D ist.

T_2' : Kontraktion einer Kante e und somit $T_2'(D, e) := D/e$.

Diese Transformation ist nur dann anwendbar, falls e keine Schlinge von D ist und der Zielknoten v einen Eingangsgrad von 1 besitzt.

Beweis:

Der einzige Unterschied zur Definition der Reduzibilität von Wurzeldigraphen besteht darin, dass T'_2 nun zusätzlich auch auf Kanten angewendet werden könnte, welche zum Wurzelknoten des Wurzeldigraphen führen. Auf initialen Wurzeldigraphen ist die Transformation T'_2 dabei völlig identisch mit der Transformation T_2 .

Da D ein initialer Wurzeldigraph ist folgt nach Lemma 4.1.2, dass auch alle Digraphen D_i einer beliebigen Reduktionsfolge $(D_i)_{i=0,\dots,|E(D)|}$ somit initiale Wurzeldigraphen sind. Damit ist eine Anwendungsfolge von T_1 und T'_2 stets auch eine Reduktionsfolge und umgekehrt. Daraus folgt die Aussage des Satzes. \square

Damit entfällt in T'_2 die Bedingung mit dem Wurzelknoten aus der Definition von T_2 . Somit ist es möglich die Transformationen T_1 und T_2 leichter mit den Löschungen und Kontraktionen von Kanten in der Minorentheorie zu identifizieren, wie im nachfolgenden Kapitel dargestellt wird.

4.2 Charakterisierung der Reduzibilität durch eingeschränkte Minoren

Wie bereits in Satz 1.2.3 dargelegt wurde, sind die reduziablen Wurzeldigraphen durch die Teilgraphenrelation für Digraphen charakterisierbar. Allerdings wird dabei immer die Teilgraphenrelation auf der Menge der Wurzeldigraphen betrachtet, denn nicht jeder Teilgraph ist wiederum ein Wurzeldigraph. Wegen dem Lemma 4.1.1 reicht bei den nachfolgenden Betrachtungen sogar die Klasse der initialen Wurzeldigraphen. Nachfolgend bezeichne $\mathcal{W}_{r,i}$ die Klasse der reduziablen initialen Wurzeldigraphen.

4.2.1 Korollar:

Seien G und H initiale Wurzeldigraphen mit $G \subseteq H$ und gleichem Wurzelknoten r , dann folgt aus der Reduzibilität von H stets die Reduzibilität von G .

Das heißt, die Reduzibilität ist auf der Klasse der initialen Wurzeldigraphen erblich unter \subseteq und es gilt $\text{Forb}_{\subseteq}(\mathcal{R}) = \mathcal{W}_{r,i}$.

Beweis:

Dies folgt direkt aus dem Charakterisierungssatz (Satz 1.2.3) für reduziablen Wurzeldigraphen. \square

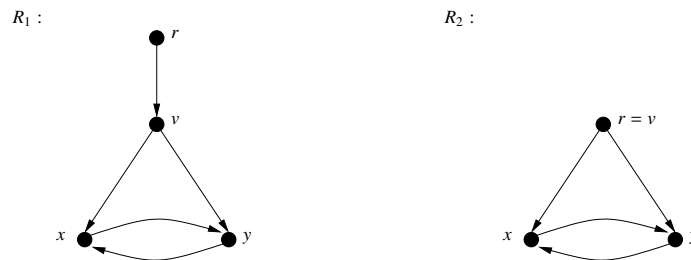


Abbildung 4.2: die initialen Wurzeldigraphen R_1 und R_2 aus Satz 4.2.2

4.2.2 Satz:

Seien G und H initiale Wurzeldigraphen mit $G \preccurlyeq_i H$ und gleichem Wurzelknoten r , dann folgt aus der Reduzibilität von H stets die Reduzibilität von G .

Das heißt, die Reduzibilität ist auf der Klasse der initialen Wurzel digraphen erblich unter \leq_t und es gilt $\text{Forb}_{\leq_t}(\{R_1, R_2\}) = \mathcal{W}_{r,i}$. (für R_1 und R_2 siehe Abbildung 4.2)

Beweis:

Dies folgt direkt aus dem Charakterisierungssatz (Satz 1.2.3) für reduzierbare Wurzel digraphen, wobei die Ersetzung von Kanten in der Darstellung der Elemente von \mathcal{R} in Abbildung 1.3 einer Unterteilung entspricht. Das heißt, jedes Element von \mathcal{R} ist zu einer Unterteilung von R_1 oder R_2 isomorph, wobei die Wurzel digraphen R_1 und R_2 in Abbildung 4.2 dargestellt sind.

Somit gilt also $\text{Forb}_{\leq_t}(\{R_1, R_2\}) = \mathcal{W}_{r,i}$. □

Für \leq_{JRS} folgt eine analoge Aussage.

4.2.3 Satz:

Seien G und H initiale Wurzel digraphen mit $G \leq_{JRS} H$ und gleichem Wurzelknoten r , dann folgt aus der Reduzibilität von H stets die Reduzibilität von G .

Das heißt, die Reduzibilität ist auf der Klasse der initialen Wurzel digraphen erblich unter \leq_t und es gilt $\text{Forb}_{\leq_{JRS}}(\{R_1, R_2\}) = \mathcal{W}_{r,i}$. (für R_1 und R_2 siehe Abbildung 4.2)

Beweis:

Da \leq_{JRS} eine Erweiterung der topologischen Minorenrelation ist, folgt direkt die Einschränkung von \mathcal{R} zu $\{R_1, R_2\}$.

Seien G und H initiale Wurzel digraphen mit $G \leq_{JRS} H$ und H ist reduzierbar. Angenommen G wäre irreduzierbar, dann ist nach Satz 1.2.3 in G ein Teilgraph enthalten, welcher zu einem Digraphen $R \in \{R_1, R_2\}$ isomorph ist. Weil aber die Teilgraphenrelation die Reduzibilität bewahrt, muss durch die Kontraktionen bei der Bildung von G die Struktur von R entstanden sein, welche vorher nicht in H enthalten war. Das heißt, die Struktur von R muss in H unterbrochen gewesen sein und durch die Kantenkontraktionen wurden die Dipfade in der Struktur von R geschlossen.

Der Dipfad von r nach v muss bereits in H existieren, denn r ist der Wurzelknoten.

Es reicht die Kontraktion einer einzelnen kontrahierbaren Kante zu betrachten. Dabei lassen sich nun zwei Fälle unterscheiden.

Im ersten Fall war der Dipfad von v nach x (siehe Abbildung 4.2) unterbrochen und wurde durch die Kontraktion einer Kante geschlossen. Das heißt, es gibt einen Knoten u , so dass ein Dipfad von v nach u besteht und die kontrahierte Kante e von x nach u verläuft. Dann gilt allerdings $\text{out}(x) > 1$ und $\text{in}(u) > 1$ und e ist nach Definition keine kontrahierbare Kante mehr. Gleiches gilt für eine Unterbrechung des Dipfades von v nach y .

Im zweiten Fall wird der Dipfad von y nach x durch eine Kante unterbrochen, deren Kontraktion den Dipfad von y nach x schließt. Dann existiert wieder ein u , so dass ein Dipfad von y nach u und die kontrahierte Kante e von x nach u verläuft. Dann gilt allerdings $\text{out}(x) > 1$ und $\text{in}(u) > 1$ und e ist nach Definition keine kontrahierbare Kante mehr. Gleiches gilt für eine Unterbrechung des Dipfades von x nach y .

Damit kann allerdings die Struktur von R nicht durch die Kontraktion kontrahierbarer Kanten entstanden sein und muss entgegen der Voraussetzung bereits in H enthalten gewesen sein.

Damit folgt schließlich $\text{Forb}_{\leq_{JRS}}(\{R_1, R_2\}) = \mathcal{W}_{r,i}$. □

4.2.4 Satz:

Seien G und H initiale Wurzelgraphen mit $G \leq_i H$ (mit $i=1,2,3$) und gleichem Wurzelknoten r , dann folgt aus der Reduzibilität von H stets die Reduzibilität von G .

Das heißt, die Reduzibilität ist auf der Klasse der initialen Wurzelgraphen erblich unter \leq_i und es gilt $\text{Forb}_{\leq_1}(\mathcal{R}) = \mathcal{W}_{r,i}$ und $\text{Forb}_{\leq_i}(\{R_1, R_2\}) = \mathcal{W}_{r,i}$ für $i \in \{1, 2\}$. (für R_1 und R_2 siehe Abbildung 4.2)

Beweis:

Der Beweis kann analog zum Beweis von Satz 4.2.3 geführt werden. Allerdings kann eine stark zusammenhängende Knotenmenge (bzw. Komponente) keinen Dipfad unterbrechen. Die Kontraktion einer stark zusammenhängenden Knotenmenge kann demnach keine Struktur $R \in \mathcal{R}$ in G erzeugen, welche nicht bereits in H enthalten war.

Da \leq_1 auf der Teilgraphenrelation für Digraphen und der Kontraktion von stark zusammenhängenden Komponenten basiert, folgt mit Korollar 4.2.1 die Behauptung mit $\text{Forb}_{\leq_1}(\mathcal{R}) = \mathcal{W}_{r,i}$.

Da \leq_2 und \leq_3 auf der topologischen Minorenrelation für Digraphen und der Kontraktion von stark zusammenhängenden Knotenmengen (bzw. Komponenten) basiert, folgt mit Satz 4.2.2 die Behauptung mit $\text{Forb}_{\leq_i}(\{R_1, R_2\}) = \mathcal{W}_{r,i}$ für $i \in \{1, 2\}$. \square

4.3 Resultate der Minorentheorie für reduzible initiale Wurzelgraphen

In diesem Kapitel werden die Resultate der bisherigen Arbeit auf die reduziblen Wurzelgraphen angewandt. Wie bereits in Lemma 4.1.1 dargelegt wurde, lässt sich die Untersuchung von Wurzelgraphen ohne Einschränkungen auf die Untersuchung von initialen Wurzelgraphen reduzieren. Um jedoch das Verhalten der reduziblen initialen Wurzelgraphen näher zu betrachten, werden zunächst einige wichtige Resultate im Zusammenhang mit Dominatoren vorgestellt.

Definition: (*Dominator*; vgl. [12], [2])

Seien D ein Wurzelgraph mit dem Wurzelknoten $r \in V(D)$ und x, y Knoten in D . Dann ist x genau dann ein *Dominator* von y , falls jeder Dipfad von r nach y in D den Knoten x enthält.

Dabei dominiert jeder Knoten sich selbst in natürlicher Weise und der Wurzelknoten ist der einzige Knoten, welcher alle Knoten in D dominiert.

Des Weiteren ist es sinnvoll aus der Menge der Dominatoren eines Knotens x einen Knoten auszuwählen welcher „nahe“ bei x liegt.

Definition: ($\text{dom}(x)$, $\text{dom}(X)$)

Sei x ein Knoten eines Wurzelgraphen D und $V_x := \{y \in V(D) \mid y \text{ dominiert } x\}$ die Menge aller Dominatoren von x . Weil der Wurzelknoten r_0 alle Knoten in $V(D)$ dominiert, ist V_x niemals leer. Für r_0 sei $\text{dom}(r_0) := r_0$. Andernfalls existiert genau ein Knoten y in $V_x \setminus \{x\}$, welcher von allen Knoten aus $V_x \setminus \{x\}$ dominiert wird. Dieser eindeutig definierte Knoten wird als $\text{dom}(x)$ bezeichnet.

Für eine ganze Knotenmenge $X \subseteq V(D)$ ist $V_X := \bigcap_{x \in X} \{y \in V(D) \mid y \text{ dominiert } x\}$ die Menge der Dominatoren von X . Für $r_0 \in X$ sei $\text{dom}(X) := r_0$. Andernfalls existiert genau ein Knoten y in $V_X \setminus X$, welcher von allen Knoten aus $V_X \setminus X$ dominiert wird. Dieser eindeutig definierte Knoten wird als $\text{dom}(X)$ bezeichnet.

Für Dominatoren reduzierbarer Wurzel Digraphen sind bereits folgende Verbindungen bekannt.

4.3.1 Satz: (vgl. Korollar 5.3 in [12])

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Wurzel Digraph mit Wurzelknoten r . Dann ist D genau dann reduzibel, wenn die Kantenmenge in zwei disjunkte Teilmengen $E_1, E_2 \subseteq E$ zerlegt werden kann, so dass folgendes gilt.

- Der Wurzel Digraph $D_1 := (V, E_1, \mu|_{E_1}) = D - E_2$ mit Wurzelknoten r ist ein DAG.
- Für jede Kante $e \in E_2$ mit $\mu(e) = (x, y)$ wird der Knoten x von y in D dominiert.

Es wurde sogar gezeigt, dass sich die Relation „Knoten x dominiert Knoten y “ auf den DAG D_1 überträgt.

4.3.2 Satz: (vgl. Theorem 6 in [12])

Sei $D = (V, E, \mu)$ ein Wurzel Digraph mit Wurzelknoten r . Dann ist D genau dann reduzibel, wenn die Kantenmenge in zwei disjunkte Teilmengen $E_1, E_2 \subseteq E$ zerlegt werden kann, so dass folgendes gilt.

- Der Wurzel Digraph $D_1 := (V, E_1, \mu|_{E_1}) = D - E_2$ mit Wurzelknoten r ist ein DAG.
- Für jede Kante $e \in E_2$ mit $\mu(e) = (x, y)$ wird der Knoten x von y in D_1 dominiert.

Ein wichtige Verbindung der Dominatoren zu den Zyklen eines Digraph erleichtert zudem die Arbeit mit stark zusammenhängenden Knotenmengen.

Definition: (Eintrittsknoten; vgl. [12])

Sei D ein Digraph und C ein Zyklus in D . Dann ist ein Knoten $v \in V(D)$ ein *Eintrittsknoten* von C , wenn v in C enthalten ist und ein $x \in V(D)$ existiert, so dass x nicht in C enthalten ist, aber eine Kante von x nach v führt.

4.3.3 Satz: (vgl. Theorem 7 in [12])

Sei D ein Wurzel Digraph mit Wurzelknoten r . Dann ist D genau dann reduzibel, wenn jeder Zyklus C in D mit Länge ≥ 2 einen Eintrittsknoten v besitzt, welcher alle anderen Knoten in C dominiert.

Nachfolgend werden die gerichteten Versionen der Baumweite auf der Klasse der reduziblen Digraphen untersucht. Des Weiteren werden in den Beweisen für die arboreale Weite, D-Weite und Gendarmenzahl der Spielvariante I konkrete Konstruktionen für Zerlegungen minimaler Weite vorgestellt. Im Beweis für die DAG-Weite und Gendarmenzahl der Spielvariante II wird hingegen die Konstruktion eines Gegenbeispiels durchgeführt.

4.3.4 Satz:

Sei D ein reduzibler initialer Wurzel Digraph, dann gilt $\text{dtw}(D) \leq 1$.

Beweis:

Sei $D = (V, E, \mu)$ der reduzible initiale Wurzel Digraph mit Wurzelknoten r_0 . Nachfolgend wird die Konstruktion einer arborealen Zerlegung von D mit Weite ≤ 1 beschrieben.

Schritt 0: Es seien R ein leerer Digraph, sowie W und X leere Familien von Knotenmengen aus D .

Schritt 1: Füge den Knoten r_0 zu R hinzu. Füge $W_{r_0} := \{r_0\}$ zu W hinzu.

Schritt i : Wähle $d \in V(R)$ mit $V_d := \{x \in V(D) \mid \text{dom}(x) = d\} \neq \emptyset$. Für jedes $x \in V_d$ werden die nachfolgenden Schritte durchgeführt:

- Füge den Knoten x zu R und $W_x := \{x\}$ zu W hinzu.
- Füge die Kante $e = (d, x)$ zu R und $X_e := \{d\}$ zu X hinzu.

Ist kein solches $d \in V(R)$ wählbar, gilt bereits $V(R) = V(D)$ und (R, X, W) ist eine arboreale Zerlegung von D mit Weite ≤ 1 , was im nachfolgenden nachgewiesen wird.

Im i -ten Schritt werden dabei alle direkt durch d dominierten Knoten nach R übertragen. Weil jeder Knoten durch den Wurzelknoten r_0 dominiert wird und $\text{dom}(x)$ für jedes $x \in V(D)$ einen eindeutigen Knoten liefert, endet die Konstruktion tatsächlich, wenn $V(R) = V(D)$ gilt. Es bleibt nachzuweisen, dass (R, X, W) auch wirklich eine arboreale Zerlegung der Weite ≤ 1 ist.

Offensichtlich ist W durch die Konstruktion eine Partition von $V(D)$ und es ist somit (A1) erfüllt. Angenommen (A2) ist nicht erfüllt. Dann existiert ein $e = (x, y)$ in R , so dass $W_e := \bigcup_{r > e} W_r$ keine X_e -normale Menge ist. Dabei gilt $\text{dom}(W_e) = x \in X_e$ und W_e enthält genau die Knoten, welche von y dominiert werden.

Wenn W_e nicht X_e -normal ist, dann existiert ein Dipfad P in $D - X_e$ von v über u nach w mit $v, w \in W_e$ und $u \notin W_e$. O.B.d.A. können v und w so gewählt werden, dass alle anderen Knoten von P nicht in W_e liegen.

Nun lässt sich P in zwei Teilpfade P_1 von v nach u und P_2 von u nach w zerlegen. Weil u aber nicht in W_e liegt, wird u nicht von y dominiert. Damit existiert allerdings ein Dipfad P_3 von r_0 nach u , welcher nicht über y führt. Mit P_3 und P_2 würde nun jedoch ein Dipfad von r_0 nach w führen, der nicht über y führt, was im Widerspruch zu $w \in W_e$ steht, falls $w \neq y$ wäre. Daher wird nachfolgend angenommen, dass $w = y$ gilt.

Weil y von x dominiert wird, führt der zusammengesetzte Dipfad aus P_3 und P_2 über den Knoten x . Würde P_2 über x führen, wäre dies ein Widerspruch zur Annahme, dass P nicht über X_e verläuft. Damit führt P_3 über x nach u und kann in zwei Teile P_4 von r_0 nach x und P_5 von x nach u zerlegt werden. Falls $x = r_0$ gilt, besitzt der Dipfad P_4 die Länge 0. Da x den Knoten y dominiert, existiert ein Dipfad P_6 von x nach y . Des Weiteren existiert ein Dipfad von y nach v , denn y dominiert den Knoten v . Wird dieser mit dem Dipfad P_1 verknüpft, entsteht ein Dipfad P_7 von y nach u .

Mit den Knoten r_0, x, y, u und den Dipfaden P_2, P_4, P_5, P_6, P_7 ist ein Teilgraph von D' beschrieben, welcher zu einem Digraphen aus \mathcal{R} isomorph ist. Dieser Teilgraph ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Mit Satz 1.2.3 wäre der Wurzeldigraph D somit entgegen der Voraussetzung irreduzibel.

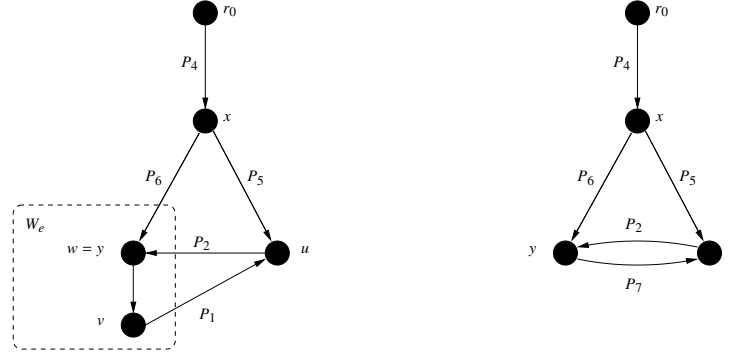
Damit wurde bewiesen, dass W_e tatsächlich X_e -normal ist. Somit erfüllt (R, X, W) auch die Bedingung (A2) und ist eine arboreale Zerlegung. Die Weite beträgt dabei nach Konstruktion ≤ 1 und es gilt $\text{dtw}(D) \leq 1$. \square

4.3.5 Satz:

Sei D ein reduzierbarer initialer Wurzeldigraph, dann gilt $\text{dw}(D) \leq 1$.

Beweis:

Sei D ein reduzierbarer initialer Wurzeldigraph mit Wurzelknoten r_0 und (R, X, W) die arboreale Zerlegung mit Weite ≤ 1 , wie sie im Beweis von Satz 4.3.4 konstruiert wurde. Bilde zunächst

Abbildung 4.3: Teildarstellung von D und des in Satz 4.3.4 konstruierte Teilgraphen D' .

$X_t := \bigcup_{e \sim t} X_e$ für alle $t \in V(R)$. Setze nun $T := U(R)$ und $W' := (W'_t)_{t \in V(T)}$ mit $W'_t := W_t \cup X_t$. Dabei gilt nach Konstruktion $|W'_t| \leq 2$ für alle $t \in V(T)$ und (T, W') ist ein geordnetes Paar, welches noch auf die Eigenschaften (C1) und (C2) hin zu untersuchen ist.

Offensichtlich ist (C1) für W' erfüllt. Sei nun $S \subseteq V(D)$ eine stark zusammenhängende Knotenmenge in D . Dann lassen sich die Mengen

$$V_S := \{ t \in V(T) \mid W'_t \cap S \neq \emptyset \} \quad \text{und} \\ E_S := \{ e = \{ x, y \} \in E(T) \mid x, y \in V_S \text{ und } W'_x \cap W'_y \cap S \neq \emptyset \}$$

bilden.

Ist in S nur ein Knoten $v \in S$ enthalten, so lassen sich zwei Fälle unterscheiden.

- Ist v kein Dominator eines weiteren Knotens in D , dann ist v nur in W'_v enthalten und bildet daher mit (V_S, E_S) einen zusammenhängenden Teilbaum von T mit nur einem Knoten. Somit ist (C2) erfüllt.
- Ist v ein Dominator in D , dann ist v in W'_v enthalten. Weitere Knoten $t \in V(T)$ mit $v \in W_t$ sind direkte Nachbarknoten von v in T mit $(v, t) \in E(R)$. Dabei gilt für je zwei dieser Knoten t_1, t_2 stets $W'_{t_1} \cap W'_{t_2} \cap S = \{ v \} \neq \emptyset$. Daher wird mit (V_S, E_S) ein zusammenhängender Teilbaum von T gebildet und (C2) ist erfüllt.

Von nun an wird angenommen, dass S mehr als nur einen Knoten beinhaltet.

Angenommen, (V_S, E_S) ist nicht zusammenhängend. Allerdings besteht der stark zusammenhängende Digraph $D[S]$ aus Zyklen, deren dominierenden Eintrittsknoten in D nach Satz 4.3.3 ebenfalls in S enthalten sind. Da S stark zusammenhängend ist, existiert nun ein Knoten v_S in S , der alle dominierenden Eintrittsknoten und somit auch alle Knoten in S dominiert.

Offensichtlich bilden die Knoten von S durch die dominierenden Eintrittsknoten mit $R[S]$ wiederum eine Arborescence und für alle Kanten $e \in E(R[S])$ gilt $X_e \cap S \neq \emptyset$. Damit ist $T[S]$ bereits ein zusammenhängender Teilgraph von (V_S, E_S) . Für jeden Knoten $x \in V_S \setminus S$ existiert ein $x_S \in S$, so dass $e' = (x_S, x) \in E(R)$ mit $X_{e'} = \{ x_S \}$ gilt. Damit folgt $W'_x \cap W'_{x_S} \cap S = X_{e'} \cap S = \{ x_S \} \neq \emptyset$ und daher $\{ x, x_S \} \in E_S$. Damit ist (V_S, E_S) ein zusammenhängender Teilbaum von T .

Somit erfüllt das geordnete Paar (T, W') die Bedingungen (C1) und (C2) und ist daher eine D-Zerlegung von D mit Weite ≤ 1 . \square

Ein Beispiel für eine arboreale Zerlegung nach der Konstruktionsmethode im Beweis von Satz 4.3.4 und eine D-Zerlegung nach der Konstruktionsmethode im Beweis von Satz 4.3.5 ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

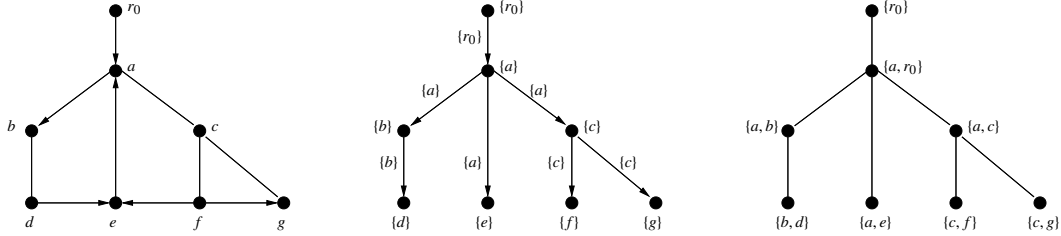


Abbildung 4.4: Beispiel einer arborealen Zerlegung und einer D-Zerlegung eines reduziblen initialen Wurzeldigraphen nach der Konstruktion im Beweis von Satz 4.3.4 bzw. Satz 4.3.5

Ausgehend von Satz 4.3.4 ist es außerdem möglich Gendarmenzahl in Spielvariante I beim Räuber- und Gendarmen-Spiel auf reduziblen initialen Wurzeldigraphen zu beschreiben.

4.3.6 Satz:

Sei D ein reduzibler initialer Wurzeldigraph, dann gilt $dtw(D) + 1 = cn_1(D) \leq 2$.

Beweis:

Sei D ein reduzibler initialer Wurzeldigraph mit Wurzelknoten r_0 und (R, X, W) die arboreale Zerlegung mit Weite ≤ 1 , wie sie im Beweis von Satz 4.3.4 konstruiert wurde. Nach Satz 3.3.4 lässt sich diese arboreale Zerlegung in eine Räuber-monotone Gewinnstrategie für 2 Gendarmen im Spiel auf D gemäß Spielvariante I umformen. So folgt bereits die Aussage $cn_1(D) \leq 2$ und diese Strategie ist sogar Gendarmen-monoton.

Des Weiteren liefert die arboreale Weite sogar eine untere Schranke für die Gendarmenzahl in dieser Spielvariante. Angenommen dem wäre nicht so und es gäbe einen reduziblen initialen Wurzeldigraphen D mit $cn_1(D) < dtw(D)$. Enthält D keinen Zyklus der Länge ≥ 2 , so gilt direkt $dtw(D) + 1 = cn_1(D) \leq 1$. Enthält D hingegen einen Zyklus der Länge ≥ 2 , so gilt direkt $dtw(D) + 1 = cn_1(D) = 2$. Somit folgt in jedem Fall $dtw(D) + 1 = cn_1(D) \leq 2$, wie behauptet. \square

4.3.7 Satz:

Für jedes $k \geq 0$ existiert ein reduzibler initialer Wurzeldigraph D_k mit $dgw(D_k) = cn_2(D) - 1 = k$.

Beweis:

Zur Vereinfachung der Notation wird an dieser Stelle die Konstruktion von D_k als schlichter Digraph beschrieben.

Der reduzible initiale Wurzeldigraph D_k kann aus einem vollständigen Binärbaum B_k der Höhe k erzeugt werden. Nachfolgend wird die Menge der Blattknoten von B_k mit L_k bezeichnet und $r \in V(B_k)$ bezeichne den Knoten, welcher zu allen Blättern des Baumes den gleichen Abstand besitzt. Dann wird der Baum so orientiert, dass alle Kanten vom Knoten r weg zeigen. Nun liegt ein Wurzeldigraph D'_k mit Wurzelknoten r vor.

Setze nun $E_1 := E(D'_k)$ und $E_2 := \emptyset$, dann folgt mit Satz 4.3.1 die Reduzibilität von D'_k . Füge nun zu je zwei verschiedene Knoten $x, y \in V(D'_k)$ eine Kante von x nach y zu D'_k hinzu, wenn y den Knoten x dominiert. Auf diese Weise wird lediglich die Kantenmenge E_2 angereichert, ohne

die Bedingungen von Satz 4.3.1 zu verletzen. Der so angereicherte Wurzeldigraph D'_k ist daher weiterhin reduzibel.

Wird D'_k nun noch initialisiert, ist $D_k := I_0(D'_k)$ der gewünschte reduzierbare initiale Wurzeldigraph mit Wurzelknoten r_0 . Einige Beispiele für diese Konstruktion sind in Abbildung 4.5 dargestellt.

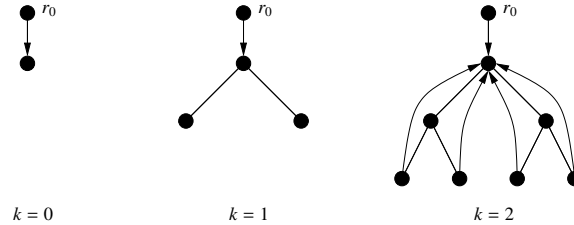


Abbildung 4.5: Beispiele von D_k in Satz 4.3.7 für $k = 0, 1, 2$

Zunächst lässt sich eine Strategie für $k + 1$ Gendarmen im Spiel auf D_k nach Spielvariante II beschreiben.

- Wähle die Position der Gendarmen im ersten Schritt $X_0 := \{r_0\}$.

Der Räuber wählt eine beliebige Position v_0 gemäß den Spielregeln.

- Nun wählen die Gendarmen diejenigen Knoten X_{i+1} aus, welche auf einem Dipfad der Länge k von r zu einem Knoten in L_k führt und über v_i verläuft.

Der Räuber wählt eine neue Position v_{i+1} in $D_k - (X_i \cup X_{i+1})$ gemäß den Spielregeln.

Auf diese Weise ist eine Gendarmen-monotone Strategie formuliert. Da sich die Fluchtmöglichkeiten für den Räuber bei jedem Zug tatsächlich verringern, ist dies sogar eine Räuber-monotone Gewinnstrategie für $k + 1$ Gendarmen im Spiel auf D_k nach Spielvariante II. Damit wurde bereits $cn_2(D_k) - 1 \leq dgw(D_k) \leq k$ gezeigt.

Nachfolgend wird eine Strategie für den Räuber im Spiel gegen k Gendarmen im Spiel auf D_k nach Spielvariante II beschrieben. Dabei wird der Räuber immer versuchen einen der Knoten in L_k zu besetzen.

- Der Räuber wählt einen beliebigen Knoten aus L_k und besetzt diesen.
- Solange die Gendarmen nicht versuchen, die Position des Räubers zu besetzen, ist es nicht nötig die Position des Räubers zu verändern.

Versuchen die k Gendarmen die Position des Räubers zu besetzen, sind während des Positionswechsels nur maximal $k - 1$ Knoten durch die Gendarmen besetzt. Dem Räuber stehen von einem Knoten $v \in L_k$ immer die k Knoten auf dem Dipfad von r nach v zur Flucht zur Verfügung. Das heißt, mindestens ein Fluchtweg ist nicht durch die Gendarmen bewacht und dem Räuber ist es möglich einen geeigneten Knoten aus L_k zu besetzen, welcher im nächsten Zug weiterhin frei von Gendarmen ist.

Auf diese Weise hat der Räuber sogar eine Gewinnstrategie gegen k Gendarmen. Es folgt daher $dgw(D_k) \geq cn_2(D_k) - 1 > k - 1$.

Aus den beiden Gewinnstrategien folgt schließlich die Behauptung $dgw(D_k) = cn_2(D_k) - 1 = k$. \square

Somit wurde bewiesen, dass die reduzierbaren WurzelDigraphen eine beschränkte arboresale Weite, D-Weite und Gendarmenzahl für Spielvariante I besitzen. Daher ist es möglich die bereits bekannten Techniken für diese Invarianten einzusetzen. Dabei ist davon auszugehen, dass die niedrigen oberen Schranken zu effektiven Algorithmen führen können.

Leider wurde eine Beschränktheit der DAG-Weite und Gendarmenzahl für Spielvariante II widerlegt. Weiterführende Forschung könnte daher in Richtung einer weiteren Spezialisierung der Reduzibilität von WurzelDigraphen verlaufen. Das heißt, durch die Betrachtung einer kleineren Teilmenge der reduzierbaren initialen WurzelDigraphen ist es unter Umständen möglich eine obere Schranke für die DAG-Weite oder die Gendarmenzahl der Spielvariante II zu finden. Wird eine solche Klasse von Digraphen durch erbliche Digrapheigenschaften charakterisiert, wäre damit eventuell sogar ein Ansatz zur Charakterisierung derjenigen Klassen von Digraphen mit beschränkter DAG-Weite bzw. Gendarmenzahl der Spielvariante II gefunden.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden die wichtigsten Ansätze aus der Minorentheorie für Digraphen vorgestellt. Dabei wurden nicht nur einige ausgewählte Ansätze für eine gerichtete Version der Baumzerlegungen und Baumweite für Digraphen vorgestellt, sondern, die teilweise nur auf schlichten Digraphen basierenden, Definitionen und Resultate auf allgemeinere Digraphen mit Mehrfachkanten und Schlingen verallgemeinert. Die Untersuchung der arborealen Weite, gerichteten Baumweite, D-Weite und DAG-Weite, sowie den Gendarmenzahlen in den vorgestellten Spielvarianten des Räuber-und-Gendarmen-Spiels auf Digraphen, erfolgte dabei auf einer grundlegenden Liste von Anforderung für eine solche gerichtete Version der Baumweite. Dazu zählen die Forderungen (**General**), (**Union**) und (**Acyclic**). Weiterer Ansatz für eine gerichtete Baumweite ist unter Anderem die Kelly-Weite (z.B. [13]). Für die Wegbreite existiert bereits die gerichtete Version und ist zum Beispiel in [4] untersucht wurden.

Nach einer Übersicht zu den Ansätzen für eine gerichtete Baumweite wurden Ansätze für einen gerichteten Minorenbegriff zusammengetragen. Es wurde dabei deutlich, dass eine direkte Übertragung des ungerichteten Minorenbegriffs nicht erfolgversprechend ist und es wurden grundlegende Anforderungen an eine eingeschränkte Minorenrelation formuliert. Dazu zählen die Forderungen (**DAG**) und (**Closed**).

Als eingeschränkte Minorenrelationen für Digraphen wurden zum einen der Ansatz aus [15] vorgestellt, als auch neue Varianten definiert und untersucht. Dabei wurde als Ausgangspunkt die Teilgraphenrelation \subseteq für Digraphen genutzt und systematisch erweitert. Es konnte gezeigt werden, dass alle beschriebenen eingeschränkten Minorenrelationen die Forderung (**DAG**) erfüllen. Die Forderung (**Closed**) erwies sich allerdings als problematisch. So konnte (**Closed**) zwar für \subseteq und \leq_1 in dieser Arbeit bewiesen werden, aber für die weiteren Anreicherungen \leq_2 und \leq_3 ist dies noch ein offenes Problem und bietet die Grundlage für weiterführende Forschung. Insbesondere sei an dieser Stelle aber die topologische Minorenrelation für Digraphen erwähnt. Für diese waren bisher keine Untersuchungen bekannt und wurde gezeigt, dass sich \leq_t unter Umständen als ein sehr erfolgreicher Ansatz für den gerichteten Minorenbegriff durchsetzen könnte. Damit sollte dies ein Hauptpunkt für weiterführende Untersuchungen darstellen.

Des Weiteren wurde das Konzept der reduziablen Wurzeldigraphen aus der Sicht der Minorentheorie für untersucht. Dabei war es möglich eine spezialisierte Definition für die Reduzibilität auf initialen Wurzeldigraphen herzuleiten. Außerdem ist es gelungen die Menge der verbotenen Minoren unter \subseteq und \leq_1 in Verbindung mit der bereits aus [12] bekannten Charakterisierung der reduziablen Wurzeldigraphen zu setzen. Für die eingeschränkten Minorenrelationen \leq_2 , \leq_3 , \leq_t und \leq_{JRST} war es sogar möglich die Menge der verbotenen Minoren auf zwei Elemente einzugrenzen.

Schließlich ist es sogar gelungen zu beweisen, dass alle reduziablen initialen Wurzeldigraphen eine arboreale Zerlegung und D-Zerlegung mit Weite ≤ 1 besitzen und es wurden Konstruktionen dieser Zerlegungen beschrieben, welche in der praktischen Anwendung eingesetzt werden können. Es konnte ebenso nachgewiesen werden, dass für das gerichtete Räuber-und-Gendarmen-Spiel nach Spielvariante I nur zwei Gendarmen für eine Gewinnstrategie nötig sind. Weiterführende Forschung sollte daher die Anwendung der gefundenen Erkenntnisse in der Praxis als Fokus besitzen.

Leider wurde eine Beschränkung der DAG-Weite und der Gendarmenzahl in Spielvariante II für die reduziablen initialen Wurzeldigraphen widerlegt. Weiterführende Forschung könnte allerdings in einer Untersuchung weiterer Spezialfälle bestehen, indem die reduziablen initialen Wurzeldigraphen durch

zusätzliche Anforderungen weiter eingeschränkt werden, bis eine Beschränkung der DAG-Weite eintritt. Dies könnte auch Resultate hervorbringen, die für die Charakterisierung der Klasse aller Digraphen mit beschränkter DAG-Weite von Interesse sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Isolde Adler. Directed tree-width examples. *Journal of Combinatorial Theory*, 97:718–725, 2007.
- [2] Alfred V. Aho, Ravi Sethi, and Jeffrey D. Ullman. *Compilers - Principles, Techniques, and Tools*. Addison-Wesley, 1986.
- [3] Frances E. Allen. Control flow analysis. *ACM SIGPLAN Notices - Proceedings of a symposium on Compiler optimization*, 5:1–15, 1970.
- [4] János Bárat. Directed path-width and monotonicity in digraph searching. *Graphs and Combinatorics*, 22:161 – 172, 2006.
- [5] Dietmar Berwanger, Anuj Dawar, Paul Hunter, and Stephan Kreutzer. Dag-width and parity games. In *Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, volume 23, pages 524–536, 2006.
- [6] Dietmar Berwanger, Anuj Dawar, Paul Hunter, Stephan Kreutzer, and Jan Obdržálek. The dag-width of directed graphs. eingereicht beim Journal of Combinatorial Theory, 2009.
- [7] Hans L. Bodlaender. Treewidth: Algorithmic techniques and results. In *Mathematical Foundations of Computer Science*, volume 1295 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 19 – 36, 1997.
- [8] Reinhard Diestel. *Graphentheorie*. Springer Verlag, 2 edition, 2000.
- [9] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer Verlag, 3 edition, 2005.
- [10] Rudolf Halin. s -functions for graphs. *Journal of Geometry*, 8:171–186, 1976.
- [11] Matthew S. Hecht and Jeffrey D. Ullman. Flow graph reducibility. *ACM Symposium on Theory of Computing*, 4:238–250, 1972.
- [12] Matthew S. Hecht and Jeffrey D. Ullman. Characterizations of reducible flow graphs. *Journal of the ACM*, pages 367–375, 1974.
- [13] Paul Hunter and Stephan Kreutzer. Digraph measures: Kelly decompositions, games, and orderings. *Theoretical Computer Science*, 399:206–219, 2008.
- [14] Thor Johnson, Neil Robertson, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. Addendum to „directed tree-width“. <http://www.math.gatech.edu/~thomas/PAP/diradd.pdf>.
- [15] Thor Johnson, Neil Robertson, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. Directed tree-width. *Journal of Combinatorial Theory*, 82:138–155, 2001.
- [16] Jan Obdržálek. Dag-width - connectivity measure for directed graphs. In *Symposium on Discrete algorithm (ACM-SIAM)*, volume 7, pages 814 – 821, 2006.
- [17] Bruce Reed. Introducing directed tree width. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 3:222–229, 1999.

- [18] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. i. excluding a forest. *Journal of Combinatorial Theory*, 35:39–61, 1983.
- [19] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors i - xxiii. *Journal of Combinatorial Theory*, 1983–2010.
- [20] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. iii. planar tree-width. *Journal of Combinatorial Theory*, 36:49–64, 1984.
- [21] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. ii. algorithmic aspects of tree-width. *Journal of Algorithms*, 7:309–322, 1986.
- [22] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. v. excluding a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory*, 41:92–114, 1986.
- [23] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. iv. tree-width and well-quasi-ordering. *Journal of Combinatorial Theory*, 48:227–254, 1990.
- [24] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors .xiii. the disjoint paths problem. *Journal of Combinatorial Theory*, 63:65–110, 1995.
- [25] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. xviii. tree-decompositions and well-quasi-ordering. *Journal of Combinatorial Theory*, 89:77–108, 2003.
- [26] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. xx. wagner’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, 92:325–357, 2004.
- [27] Mohammad Ali Safari. D-width: A more natural measure for directed tree width. In *Lecture Notes in Computer Science (Mathematical Foundations of Computer Science)*, volume 3618, pages 745–756, 2005.
- [28] Paul D. Seymour and Robin Thomas. Graph searching, and a min-max-theorem for tree-width. *Journal of Combinatorial Theory*, 58:22–33, 1993.
- [29] R. Endre Tarjan. Testing flow graph reducibility. *Journal of Computer and System Sciences*, 9:355–365, 1974.
- [30] Mikkel Thorup. Structured programs have small tree-width and good register allocation. In *Lecture Notes in Computer Science (Graph-Theoretic Concepts in Computer Science)*, volume 1335, pages 318–332, 1997.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Beispiel eines Digraphen mit mehreren Wurzelknoten	8
1.2	Konstruktionsschema aus Lemma 1.1.2	9
1.3	Struktur der Digraphen in \mathcal{R} und der Sonderfall mit $r = v$	14
2.1	Beispiel eines Minoren G von Graph H mit $G = H'/E$ und $H' \subseteq H$	16
2.2	die Graphen K^5 und $K_{3,3}$ aus Satz 2.1.6	19
2.3	Beispiel für eine Unterteilung eines Graphen	20
2.4	Beispiel für zwei mögliche Baumzerlegungen von G mit Weite 2	21
3.1	Beispiel eines Minoren G von Digraph H mit $H \supseteq H'$ und $H'/E = G$	29
3.2	Beispiel eines Digraphen D ohne Zyklen der Länge ≥ 2 und D/e als Minor von D mit Zyklus der Länge 2	31
3.3	Gegenbeispiel für Lemma 3.2.1 für Digraphen mit $U := \{a\}$, $X := \{b\}$, $Y := \{c\}$ und somit $X_U = Y_U = X \cap Y = \emptyset$	32
3.4	Beispiel für eine arboreale Zerlegung eines Digraphen D mit Weite 1	36
3.5	Konstruktionsschemata für eine arboreale Zerlegung von $D_1 \vec{\cup} D_2$ nach Satz 3.3.2	37
3.6	Beispiel eines Digraphen D mit $dtw(D) = 3$, aber ohne Gendarmen-monotone Gewinnstrategie für 4 Gendarmen (aus [15])	39
3.7	der Digraph D^1 von Proposition 3.3.5 ohne Räuber-monotone Gewinnstrategie für 5 Gendarmen, aber mit Gewinnstrategie für 4 Gendarmen (aus [1])	39
3.8	der Digraph D^2 von Proposition 3.3.7 mit $dtw(D^2) \geq 4$ und ohne Haven der Ordnung 5 (aus [1])	40
3.9	der Digraph D_3 gemäß der Konstruktion nach Proposition 3.4.1 mit $n = 3$ als Gegenbeispiel zur Annahme aus [17] und für (General)	43
3.10	Konstruktionsschema einer gerichteten Baumzerlegung für die gerichtete Vereinigung $D_1 \vec{\cup} D_2$ nach Satz 3.4.3.	44
3.11	Beispiel für eine D-Zerlegung eines Digraphen D mit Weite 1	45
3.12	Konstruktionsschema einer D-Zerlegung für die gerichtete Vereinigung $D_1 \vec{\cup} D_2$ nach Satz 3.5.2.	46
3.13	Beispiel für eine DAG-Zerlegung eines Digraphen D mit Weite 2	47
3.14	Konstruktionsschema für die Bildung eines eindeutigen initialen Wurzelknotens für eine DAG-Zerlegung nach Lemma 3.6.1	49
3.15	Konstruktionsschema für die Aufspaltung eines Knotens d_0 in einer DAG-Zerlegung	49
3.16	Konstruktionsschema für das Hinzufügen von X zur Kante (d_0, d_1) einer DAG-Zerlegung	50
3.17	Konstruktionsschemata einer DAG-Zerlegung für die gerichtete Vereinigung $D_1 \vec{\cup} D_2$ nach Satz 3.6.5.	51
3.18	der Digraph D^3 und einer arborealen Zerlegung mit $dtw(D^3) \leq 3$ (aus [1])	64
3.19	planare Darstellung des Digraphen J_3 als Beispiel für J_k (aus [15])	65
4.1	Konstruktionsschema für die Initialisierung $I_0(D)$ eines Wurzel Digraphen D mit Wurzelknoten r	71
4.2	die initialen Wurzel Digraphen R_1 und R_2 aus Satz 4.2.2	73
4.3	Teildarstellung von D und des in Satz 4.3.4 konstruierte Teilgraphen D'	78

4.4	Beispiel einer arborealen Zerlegung und einer D-Zerlegung eines reduzi- blen initialen Wurzeldigraphen nach der Konstruktion im Beweis von Satz 4.3.4 bzw. Satz 4.3.5 . .	79
4.5	Beispiele von D_k in Satz 4.3.7 für $k = 0, 1, 2$	80

ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema „Über Minoren gerichteter Graphen“ unter Betreuung von Prof. Dr. rer. nat. habil. Ulrike Baumann selbstständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Datum

Unterschrift